Kompetenzzunahme durch Aufgabenvariationen im Mathematikunterricht einer Gesamtschulklasse mit Fallbeispielen von Schülerinnen und Schülern aus den Jahrgangsstufen 9/10

Vom Fachbereich Mathematik
der Universität Duisburg-Essen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Dr. paed.
genehmigte Dissertation

von
Klaus-Dieter Kohls
aus
Duisburg

Referent:	Prof. Dr. Günter Törner
Korreferent:	Prof. Dr. Peter Berger
Tag der mündlichen Prüfung:	8. Februar 2007

Widmung

Die vorliegende Arbeit entstand auf Anregung von

Herrn Prof. Dr. Günter Törner

Herrn Prof. Dr. G. Törner danke ich sehr herzlich für die Betreuung dieser Arbeit.

Herrn Prof. Dr. Peter Berger danke ich für die freundliche Übernahme des Korreferats.

Des weiteren gilt mein Dank
dem Leiter der Gesamtschule Duisburg-Mitte, Herrn Gerd Demmer, und dem Abteilungsleiter für die Klassen 7-10, Herrn Claus Fischer, die meine Arbeit unterstützt haben,
meinem ehemaligen Mathematik E-Kurs und
meiner Frau Gabi, die immer sehr geduldig auf mich gewartet hatte.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Überblick

„Der Unterricht an deutschen Schulen muss den Schülern zu mehr mathematischer Kompetenz verhelfen." - Meinungsäußerungen in dieser oder ähnlicher Art sind spätestens nach dem Erscheinen der PISA-Studie landesweit als eine unstrittige Position bekannt geworden. Insbesondere Kompetenzdefizite „bei Aufgaben, die ein qualitatives Verständnis der Sachverhalte verlangen [...]." [Nach Baumert, 2001] können offenbar mit den Mathematikaufgaben der Schulbücher allein gegenwärtig nicht aufgearbeitet werden.

Einen Aufbau mathematischer Kompetenz bei Schülern zu initiieren mit dem Ziel, am Ende schließlich ein Mehr an (geforderter) Mathematikkompetenz vermittelt zu haben - ist eine permanente Herausforderung an den Lehrer von heute. Die Fragen des „Wie?" oder „Womit/wodurch?" stehen in engem Zusammenhang mit

- den Richtlinien der Bundesländer,
- dem schulinternen Lehrplan und
- den lehrerspezifischen und stundenplantechnischen Bedingungen der jeweiligen Lerngruppe

Häufig wird noch etwas vergessen: Die Klasse, die Lerngruppe, die Schüler vor Ort,

- die aus unterschiedlichen soziokulturellen Schulamtsbezirken stammen und
- in den 9. und 10. Klassen bis zu einem Drittel der Unterrichtszeit mit dem Training von Einstellungstests zusätzlich beschäftigt sind.

Es entwickelte sich beim Autor dieser Arbeit der Wunsch, die offenen Fragen nach mehr mathematischer Kompetenz unter den gegebenen Ungewissheiten und Konditionen zu klären.

Nun ist mathematische Kompetenz mehr als nur die schematische Beherrschung von Verfahren. Mehr mathematische Kompetenz - in dieser Arbeit als

„Kompetenzzunahme“ bezeichnet - bedeutet für die folgenden Untersuchungen sowohl eine qualitative Steigerung in der Anwendung einiger mathematischer Teilkompetenzen als auch ihren erhöhten quantitativen Einsatz. Die grundsätzlichen Ideen, die Ausgangspunkt meiner Untersuchungen wurden, stammen von Prof. Schupp, Saarbrücken. Prof. Schupp regt an, Aufgabenvariationen als eine unterrichtsmethodische Möglichkeit einzusetzen, Kompetenzen auszubilden und zu trainieren. Die dabei zu beobachtenden Ausprägungen, (nach Schupp:) die angewandten Strategien, werden analysiert und in ihrer Häufigkeit bestimmt Mit diesem analytischem Vorgehen erfahren implizite Denkabläufe bei Schülern eine explizite Darstellung und damit eine mögliche Einsicht in die unterschiedlichen Erweiterungen des Verständnisses: Die Ergebnisse weisen Methodenöffnungen, Sichtöffnungen und auch Stofföffnungen bei Schülern auf.

Konkret wurden folgende Fragen geklärt:

- Wie entwickeln sich die Variationen von Mathematikaufgaben im Laufe des 9. Schuljahres?
- Welche Kompetenzen nehmen in dieser Zeit bei allen Schülern zu?
- Wie gehen einzelne Schüler mit dem Variieren von Mathematikaufgaben um?
- Welche Kompetenzen bleiben in der Folgezeit (10. Schuljahr) stabil?

Der Kompetenzbegriff wurde in den letzten ca. 200 Jahren in der Geschichte des Mathematikunterrichts innerhalb Deutschlands unterschiedlich definiert. Die verschiedenen Zeitepochen weisen unterschiedliche Perspektiven und Schwerpunkte in Bezug auf die Entstehung des mathematischen Kompetenzbegriffs und seiner Interpretation auf. Der Kompetenzbegriff, der in dieser Arbeit verwandt wurde, kann in seiner Entwicklung verfolgt werden.

Im 2. Kapitel der Arbeit werden die unterschiedlichen Möglichkeiten des Kompetenzerwerbs beleuchtet, wie sie in den 80er und 90er Jahren des letzten Jahrhunderts laut wurden. Hier wirken die Problem-Solving- und Problem-Posing-Diskussionen mit ihren Resultaten und Forderungen hinein. Dadurch lässt sich der hier vereinbarte, relativ allgemeine Kompetenzbegriff des 1. Kapitels weiter präzisieren.

Im Mittelpunkt der Arbeit steht eine Lösungsmöglichkeit, die Teile des Forderungskatalogs erfüllt: Das Variieren von Aufgaben aus dem Mathematikbuch, von Mathematik-Arbeitsblättern und von Testaufgaben zu Berufeinstellungstests. Es sind dies also Stoffinhalte, die institutionell gefordert und gesellschaftlich gefragt sind. Kapitel 3 gibt Aufschluss über die dabei verwandte Methode.

Die Kapitel 4 und 5 stellen Voruntersuchungen zu dieser Arbeit und die Planung der Hauptuntersuchung vor. Darin werden die vorrangig zu erstellenden Analysen und die Einteilung der Unterrichtsphasen erörtert.

Die Hauptuntersuchung im Kapitel 6 analysiert die Aufgabenvariationen einer Gesamtschulklasse im Verlauf des 9. Schuljahres. Die SchülerInnen veränderten die bereits von ihnen gerechneten Aufgaben sowohl in den Übungsphasen als auch in Klassenarbeiten. Beim Bearbeiten ihrer Variationen zeigten sie Teilkompetenzen auf, die die Forderungen der Kapitel 1 und 2 teilweise erfüllen.

In Kapitel 7 wird der Frage nachgegangen, wie sich bei vier SchülerInnen unter der Voraussetzung von heterogenen Mathematikleistungen Aufgabenvariationen ausbilden.

Die Ergebnisse basieren auf einer Längsschnittstudie von über 600 Aufgabenvariationen innerhalb eines ganzen 9. Schuljahres. In größeren zeitlichen Abständen, basierend auf 300 Aufgabenvariationen, war dann eine Verfestigung der bisher erlangten Kompetenzen im 10. Schuljahr festzustellen. Das fasst das 8. Kapitel zusammen.

Eine für jede/n Mathematiklehrer/in nachahmenswerte Untersuchung konnte nach einer experimentellen Phase von zwei Jahren abgeschlossen werden. Prinzipiell können die gewählten Mittel von jedem Lehrer ohne besondere Zusatzkenntnisse eingesetzt werden.

Kapitel 1

Mathematische Kompetenzen im Spiegel der Zeit

Eine der wesentlichsten Konsequenzen, die die Kulturministerkonferenz (KMK) der Länder aus den Diskussionen um die TIMS- und PISA-Studien gezogen hat, ist die Erklärung einheitlicher Bildungsstandards [27] für den Mathematikunterricht vom 16.12.2004. Die Bildungsstandards wurden festgelegt als ein einheitliches Mittel zur Sicherung und Steigerung der Qualität schulischen Arbeitens. Sie verweisen auf verbindliche Anforderungen an das Lernen (und Lehren) und stellen die Lernergebnisse in den Mittelpunkt.

Erwartungshaltungen werden in zunehmendem Maße sowohl von schulischer als auch von wirtschaftlicher Seite geäußert und finden in den Minimalanforderungen des Lehrplans ihren Ausdruck. Diese Minimalanforderungen bleiben nicht auf elementare Fähigkeiten und Fertigkeiten beschränkt, sondern betreffen alle Kompetenzbereiche, so auch Vorstellungen zu den Grundbegriffen, elementare Problemlösefähigkeiten oder Fähigkeiten zu einfachen Argumentationen.

Bildungsstandards definieren Kompetenzen für die jeweiligen Schuljahre und beschreiben auch die verschiedenen Niveaustufen. Dazu werden Aussagen gemacht, zu welchen Zeitpunkten (in der Regel: Schuljahresende) bestimmte Kompetenzen in welcher Ausprägungen vorhanden sein sollen. Dabei sind Kompetenzen

> *die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können. [66]*

Die Untersuchungszeit der vorliegenden Arbeit fällt in die Schuljahre 2000 / 2001 und 2001 / 2002. Von dem Standpunkt der gemessenen Ergebnisse her gesehen ist es interessant, dass die von der KMK Ende des Jahres 2004 verabschiedeten (allgemeinen) Kompetenzen mathematisches Argumentieren, Kommunizieren und Modellieren oder das Lösen mathematischer Probleme beinhalten.

1.1 Zur Diskussion mathematischer Kompe - tenzen – eine historische Bestandsaufnahme

Spricht man von mathematischen Kompetenzen, so kann man eine Vielfalt von Definitionen und Forderungen finden, die sich im Laufe der Jahrzehnte entwickelt und in der Literatur angesammelt haben. Nicht immer, aber doch häufig, sind die erwarteten und geforderten mathematischen Kompetenzen in Beziehung zu den geschichtlichen, wirtschaftlichen und auch bildungspolitischen Entwicklungen definiert worden.

Die Untersuchungen zur Definition mathematischer Kompetenzen haben gezeigt, dass es sinnvoll ist, erst die Veränderungen ab ca. 1900 ausführlicher aufzuzeigen und in dieser Überblicksdarstellung zeitlich mit der Meraner Konferenz von 1905 und den Forderungen von Felix Klein (siehe Kap. 1.1.2) zu beginnen. Die zeitabhängig verabredeten Kompetenzen werden im Folgenden beschrieben und das Bemühen, diese zu realisieren. Daher folgt hier nur eine kurze Darstellung über die Entwicklung der mathematischen Kompetenzen in der Zeit vor 1900.

1.1.1 Mathematikunterricht in Deutschland bis zum Jahre 1900

Im Folgenden wird insbesondere auf die ausführlichen Darstellungen von Grosse [16] , Schubring [49] , Wußing [69] verwiesen. Traditionell bildeten die vier Grundrechenarten, die Bruchrechnung , die Schlussrechnung und Teile der euklidischen Geometrie den Stoffrahmen des Mathematikunterrichts. Der mathematische Lehrstoff war also, soweit er an Schulen überhaupt vorkam, bis zum Ende des 18. Jahrhunderts nicht curricular vorgegeben. Je nach Schulform und Kenntnisstand der Lehrer wurden weitere Unterrichtsinhalte, wie Wurzeln, Logarithmen, Trigonometrie, Reihen, etc. unterrichtet. Der Unterricht war weitgehend eine lose Aufgabenfolge, die Aufgaben selbst wurden häufig in Textform angeboten und mit einer „Moral" versehen. Den Rahmen bildete allerdings vielfach ein Schulprogramm.

Durch die Einführung der Maturität (Reifeprüfung) in Preußen (1788) sowie durch das Aufkommen neuer pädagogischer Ziele, vor allem der „Erziehung zur Selbständigkeit", wurden in den Jahren 1800-1840 erhebliche Umschichtungen vollzogen. Der bisherige Lehrstoff, vor allem der Rechenunterricht, sollte nun durch einen geistbildenden Arithmetik- und Geometrieunterricht ergänzt werden. Die Unterrichtsverfassung der Gymnasien und Stadtschulen von Preußen aus dem Jahr 1816 teilte dazu den Unterrichtsstoff in Bildungsstufen ein. Dieser beinhaltete das Unterrichten der natürlichen Zahlen bis hin zur angewandten Mathematik innerhalb von 10 Schuljahren.

In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde dabei die Volksschule immer stärker aus der Entwicklung der allgemeinbildenden Schule herausgenommen. In den meisten gymnasialen Schultypen, auch in den neu hinzugekommenen Mittelschulen, entstand so gegen Ende des 19. Jahrhunderts ein Lehrstoff mit eigener Grundstruktur.

Allgemein kann festgestellt werden, dass der Erwerb von Rechen- und Anwendungskompetenzen den Schulalltag schon früh prägte. Hierbei war eher von einer elementaren „Rechenkunst" zu sprechen, vergleichbar mit dem, was im amerikanischen Raum heute als „numeracy" verstanden wird. Die erwähnte Anwendungskompetenz entbehrte zu dieser Zeit und in Folgezeit jeglicher wissenschaftlicher Definition. Man kann die Beschreibungen der zur Anwendungskompetenz ausgedrückten Erwartungshaltungen zusammenfassen. So war damals unter diesem Begriff eine Kompetenz zu verstehen, die nicht beim Lösen von Routine-/Päckchenaufgaben stehen bleibt, sondern Sachaufgaben mit Alltagsbezügen zu lösen vermag.

Die beschriebene preußische Schulreform führte allerdings im Laufe des 19. Jahrhunderts zu einem Zurückdrängen dieser Kompetenzen hin zu einer stärkeren Betonung der formalen Ziele des Gymnasiums und damit zu einer Reduktion realitätsbezogener (mathematischer) Unterrichtsinhalte. Diese Reduktion von mathematischen Anwendungskompetenzen verlief allerdings entgegen den wachsenden Bedürfnissen der Wilhelminischen Kaiserzeit. In dieser Phase des Umbruchs vom Agrar- zum Industriestaat und der Verbesserungen der Produktionsverfahren wuchs die Nachfrage nach qualifizierten Technikern und Ingenieuren. Die gesellschaftliche Wandlung forderte einen mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht, der den Anforderungen eines modernen Industriestaates gerecht werden konnte. Von dieser allgemeinen Aufbruchstimmung profitierten der Drang und das Rufen nach mathematischen Unterrichtsreformen und damit zu neuzudefinierenden mathematischen Kompetenzen. Es galt, durch neue Curricula die Kluft zwischen aktuellen mathematischen Anwendungen von Mathematik und dem Schulstoff zu überbrücken.

Die Meraner Konferenz kam mit ihren Reformen dem herrschenden Zeitgeist entgegen.

1.1.2 Die Meraner Konferenz 1905

Vor dem Hintergrund der steigenden Anforderungen in Industrie und Wirtschaft zu Beginn des 20. Jahrhunderts an geeignet vorgebildeten Schulabgängern wuchs die Kritik an den Lehrplänen der damaligen Zeit. In der Auseinandersetzung mit den vorgefundenen Rahmenbedingungen wurden im Unterricht zu realisierende Kompetenzen gefordert. Felix Klein, einer der Hauptinitiatoren der Meraner Reform , vertrat eine ausgewogene Position zwischen den formalen und materiellen Kompetenzen des Mathematikunterrichts. Dazu einige Grundgedanken der Meraner Konferenz:

> *Einmal gilt es (wie in allen anderen Fächern), den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen, überall an dem vorhandenen Vorstellungskreis anzuknüpfen, die neuen Erkenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindung zu setzen, endlich den Zusammenhang des Wissens in sich mit dem übrigen Bildungsstoff der Schule von Stufe zu Stufe mehr und mehr zu einem bewußten zu machen. Ferner wird es sich darum handeln, unter voller Anerkennung des formalen Bildungswertes der Mathematik doch auf alle einseitigen und praktisch bedeutungslosen Spezialkenntnisse zu verzichten, dagegen die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwicklung zu bringen. Von hier aus entspringen zwei Sonderaufgaben: die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens. - Die von jeher dem mathematischen Unterricht zugewiesene Aufgabe der logischen Schulung bleibt dabei unbeeinträchtigt, ja man kann sagen, daß diese Aufgabe durch die stärkere Pflege der genannten Richtung des mathematischen Unterrichts nur gewinnt, insofern dadurch die Mathematik mit dem sonstigen Interessenbereich des Schülers, in dem sich doch seine logische Fähigkeit betätigen soll, in enge Fühlung gebracht wird. [17]*

Felix Klein [25] trat ein für eine

> *praktische Differential- und Integralrechnung, welche sich auf die einfachsten Beziehungen beschränkt und diese an Hand der dem Schüler bereits geläufigen Naturvorgänge fortgesetzt veranschaulicht (ebd.)*

Krüger [26] fasst in ihrer Dissertation zur „Erziehung zum funktionalen Denken“ die Resultate der Meraner Reform zusammen:

> *Als wichtiger bildungshistorischer Erfolg der Meraner Reform kann deren Ansatz betrachtet werden, zwei bisher als gegensätzlich angesehene Bildungsideale im Mathematikunterricht zu vereinen. Die von den Reformern beabsichtigte „Verschmelzung“ der traditionellen Formalbildung mit einer zeitgemäßen materialen Bildung wurde in der Forderung nach „Erziehung zum funktionalen Denken“ ausgedrückt. Die Schulung des Denkens blieb weiterhin das Hauptziel des Mathematikunterrichts, allerdings zeigte sich eine Gewichtsverlagerung. [...] Die Bildungsinhalte, an denen das Denken gelernt wird, [waren] nicht beliebig. Funktionales Denken beinhaltet somit auch die Modernisierung des Lehrstoffs [...]. Die Meraner Vorschläge stellten damit einen tiefgreifenden Umbruch in der curricularen Entwicklung des höheren Mathematikunterrichts dar, was nicht nur die Modernisierung der Lehrstoffe, sondern auch die Bewertung allgemeiner Lehrziele betraf.*

...und erklärt das Verständnis Kleins vom „funktionalen Denken“

> *Funktionales Denken im Verständnis von Klein [...] kann als eine dem Mathematikunterricht übergeordnete allgemeine Idee, als curriculare Leitlinie oder Orientierung, aufgefasst werden. (ebd. S.151)*

und

> *Funktionales Denken im Sinne der Meraner Reformer meint eine Denkgewohnheit, die den gesamten Mathematikunterricht „durchdringen“ soll und nicht nur einzelne Unterrichtsgebiete, etwa die Funktionenlehre, betrifft. (ebd., S.168)*

Das funktionale Denken war als eine zu fördernde Denkgewohnheit von den Meranern Reforminitiatoren angesehen worden. Es sollten also ganzheitliche Sehensweisen statt abgegrenzte Denkmuster im Mathematikunterricht gelehrt werden. Richtig stellt Krüger (ebd., S.228) fest:

> *Die heute viel geforderte, didaktisch begründete „Prozessorientierung“ des Mathematikunterrichts kann insofern als Verallgemeinerung der damaligen Auffassung gesehen werden.*

1.1.3 Die Zeit nach der Meraner Konferenz

Im Jahre 1922 überarbeitete der „Deutsche Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ (DAMNU) die Meraner Lehrpläne und trat für eine noch stärkere Berücksichtigung des Realitätsbezuges der Mathematik ein. Unter anderem forderte man (ebd., S.123) die

> *Erarbeitung und Aneignung von sicheren mathematischen Kenntnissen in solchem Umfang, dass der Schüler den Gesamteindruck einer geordneten, aus sich aufbaubaren, für viele andere Wissenszweige und die Verhältnisse des praktischen Lebens verwendbaren Wissenschaft erhält.*

Die Richert´schen Richtlinien [45] von 1925 für die höheren Schulen Preußens verlangten, dass das „eigentliche Rechnen“ unter den Sachbezügen nicht leiden dürfe. Auf die „Sachbezüge“ in ihrer pervertierten Art, wie sie in der nationalsozialistischen Zeit - in einem faktischen Außerkraftsetzen der Richert´schen Reform - in Form von Bevölkerungsstatistiken, der „Biometrie“ und der „Militärmathematik“ zu finden waren, soll hier nicht näher eingegangen werden.

Bis in die Nachkriegszeit hinein fanden sich zwar inhaltliche Orientierungen an den Meraner Lehrplänen, aber ohne deren realitätszugewandter Komponente. Ein Beispiel hierfür ist Lietzmann [32] , der Mitte der fünfziger Jahre feststellte:

> *Wir haben uns heute darauf besonnen, dass die Anwendungen nicht um ihrer selbst willen, sondern um der Mathematik willen da sind.*

Tietze, Klika, Wolpers [56] analysieren diese Zeit folgendermaßen:

> *Die Schüler rechnen Übungsaufgaben. Die Teilgebiete sind untereinander wenig verknüpft und Anwendungen werden den einzelnen Teilgebieten jeweils isoliert zugeordnet. Das Herausarbeiten übergreifender Ideen und Strategien fehlt und Mathematik erscheint dem Schüler als eine Sammlung unverbundener Aufgabentypen.*

Man kann sich des Eindrucks nicht erwehren, dass die Reformdiskussionen innerhalb des Unterrichts vor Ort, in den Schulen, eher unberücksichtigt blieben. Die beklagte Isolierung der Mathematikteilgebiete und der damit verbundene Mangel an Vernetzungen zogen sich noch einige Jahrzehnte durch die Mathematikdidaktik. Die in Kap. 3 beschriebenen Aufgabenvariationen, obwohl sie in ihrer Methode nicht ein „Anwenden“ im Sinne der genannten Anwendungsaufgaben bedeuten, beinhalten aber darüber hinaus aber ein „Anwenden“ von Mathematik. Dieser damals beklagte Mangel kontrastiert die Möglichkeiten, die die vorliegende Arbeit aufzeigt.

Der Start des ersten sowjetischen Erdsatelliten Sputnik 1 am 4.10.1957 löste in der westlichen Welt einen Schock und ein zunächst lähmendes Entsetzen aus. Eine nicht erwartete Vormachtstellung in technischer und mathematisch/naturwissenschaftlicher Qualifikation war offensichtlich geworden. Es dauerte einige Zeit, bis man sich zum längst überfälligen Aufbruch rüstete. Daher stürzte man sich auch auf dem mathematisch-didaktischen Gebiet in neue Reformen.

Das folgende Diagramm versucht die qualitativen Schwerpunktsverschiebungen beider Begriffe im Lauf verschiedener Epochen zu verdeutlichen

Zeitepoche	Rechenkompetenz → ← Anwendungsko
Frühere Entwicklung	Rk → ← Ak
Bis 1900	Rk → ← Ak Formale Ziele als zusätzliche Kompetenzforderungen
Die Zeit der Meraner Konferenz	Funktionales Denken Rk → ← Ak
Deutscher Ausschuss für math. naturwiss. Unterricht	Rk → ← Ak
Richtersche Richtlinien	Rk → ← Ak
1933 bis 1945	Hier wurde eine Übersicht mit Absicht ausgelassen.
Nachkriegszeit bis Ende der 50er Jahre	Rk → ← Ak

Abbildung 1.1

1.2 Die sechziger Jahre - erste Anzeichen für Reformaufbrüche

In den frühen sechziger Jahren führte in den USA der erwähnte Sputnikschock zu einer radikalen Reform des amerikanischen Schullehrplans. Diese Reform hatte mit einer Verzögerung von einigen Jahren auch eine starke Auswirkung auf das deutsche Bildungswesen. Es schien so, dass das sozialistische Erziehungssystem die Schüler offenbar zu besseren Leistungen befähigen würde. Die Reformvorstellungen und neuen Kompetenzfestlegungen der wichtigsten Mathematikdidaktiker in der Bundesrepublik liefen darauf hinaus, das breite Auseinanderklaffen von historisch gewachsener Schulmathematik und der Universitätsmathematik zu mildern. Lenné [29] merkt dazu an:

> *Ihre Durchschlagskraft verdanken diese fachmathematischen Tendenzen jedoch in hohem Maße der Tatsache, dass die traditionelle Schulmathematik im Verhältnis zur wissenschaftlichen Mathematik weit zurückgeblieben ist.*

So wurden also in der Schulmathematik neue Kompetenzen dahingehend definiert, dass bereits in der Grundschule Mengenlehre unterrichtet wurde. In der Sekundarstufe rückten dann formale algebraische und logische Strukturen in den Vordergrund. Diese neuen Unterrichtsinhalte wurden unter der Bezeichnung „Neue Mathematik“ bekannt. Die Reformen, mit denen man die Traditionen des bisherigen Mathematikunterrichts ändern wollte, führten zu einer nahezu vollständigen Loslösung der Schulmathematik von den Realitätsbezügen. An Stelle der Anwendungen traten Veranschaulichungen der behandelten Strukturen. Somit war es ein legitimes Anliegen, das Auseinanderklaffen des mathematischen Schulstoffs zum universitären Lehrstoff zu vermeiden.

In der von Tietze, Klika, Wolpers (ebd., S.332-334) veranschaulichten Analyse der Mathematiklehrpläne der einzelnen Bundesländer, die zum größten Teil in die sechziger Jahre fallen, zeigen sich Verschiebungen in den einzeln aufgeführten Kompetenzforderungen - damals synonym als „allgemeine Qualifikationen“ bezeichnet. Es etablierten sich Anfang der sechziger Jahre in den Lehrplänen einzelner Bundesländer Kompetenzanforderungen, wie sie noch in der ersten Hälfte des gleichen Jahrhunderts nicht realisierbar waren. Ordnet man zur besseren Übersicht die nachstehenden tabellarischen Aussagen nach ihrem Erscheinungsdatum, so ergibt sich folgendes bemerkenswertes und überraschendes Bild in 1.2:

Bundesländer	Berlin	Schleswig-Holstein	Baden-Würt.	Hessen	Bremen	Saar-land	Rheinl.-Pfalz	Hamburg	NRW	Nieder-sachsen	Bayern
Datum des Erscheinens	5.54	8.55	2.57	3.57	12.57	1.60	2.60	3.62	3.63	3.64	8.64
allgemeine Qualifikationen											
Abstrahieren	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
Wissenschaftliches Denken								X	X		X
Anschauungsvermögen	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
Geistl. Initiative		X	X	X	X	X	X		X		X
Sprachliche Bildung	X	X	X	X	X		X		X		X
Ordnung, Sorgfalt, Konzentration	X	X	X	X	X		X		X		X
Kritisches Denken	X		X	X	X		X		X		
Betonte Recherchesicherheit	X		X	X		X		X			X
Anwenden			X	X	X				X		
Mathematik erleben			X				X	X			
Strukturmathematik als Leitidee								X		X	X

Tabelle 1.1

Ordnet man nun diese „allgemeinen Qualifikationen“ der Mathematiklehrpläne nach dem Gesichtspunkt, welche davon in allen Bundesländern erwartet werden, so ergibt sich folgende Übersicht:

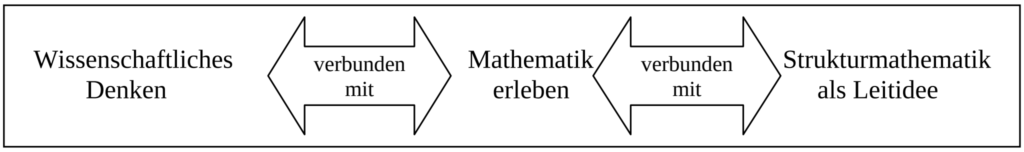


Abbildung 1.2

Man führte die Mengenlehre als Basis aller Strukturmathematik bereits in der Grundschule ein und setzte diese im Laufe der Schuljahre bis in die Sekundarstufe fort. Wurde sie noch in der Primarstufe propädeutisch behandelt, so war zwangsläufig eine zunehmende Präzisierung in ihrer grundlegenden Struktur mit dem Ziel des Aufbaus eines Axiomensystems vorgegeben. Ein Zurückdrängen der bisherigen traditionellen Mathematik ging mit der Einführung der Neuen Mathematik einher.

Obwohl die Befürworter der Neuen Mathematik an der traditionellen, also der bisher unterrichteten Mathematik, kritisierten, sie sei, nach Lenné, (ebd., S.83)

- logisch und begrifflich zu unsauber und
- verfehlt die charakteristischen mathematischen Ideen, ...

– dauerte es nicht lang, bis sie selbst, diese Neue Mathematik, auch bezüglich ihrer Kompetenzforderungen kritisiert wurde. So argumentiert Artigue [5]:

> *The failure of the New Math reform was the evident proof that mathematics expertise, complemented by some general psychological and pedagogical principles, was not enough for promoting an effective organization and management of the complex reality of teaching mathematics for all. In order to really understand the failure, it was necessary to accept the idea that other competencies, other forms of knowledge, had to be developed. It was also necessary to accept the fact that the observed distortions were not the mere effect of some dysfunction of the educational system, but rather normal phenomena induced by an inadequate and insufficient understanding of the contains and laws governing this educational system.*

Mit der Abkehr von der Neuen Mathematik in den siebziger Jahren wurden wieder von früher bekannte Kompetenzen hinsichtlich der Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichts erneut intensiv gefordert. Dabei ist nicht zu übersehen, dass das Hin und Her der Reformdiskussionen letztlich die Bemühungen verdeutlicht, sich auf verbindliche Kompetenzen einigen zu wollen.

1.3 Didaktischen Ideen und ihre methodischen Umsetzungen in den siebziger Jahren

Die wachsende Kritik an der Neuen Mathematik hatte insbesondere in der Beobachtung ihre Wurzeln, dass die erhofften Kompetenzen (vgl. Kap. 1.2) durch Inhalt und Darbietung dieser Mathematik nicht realisiert werden konnten. Das führte Mitte der siebziger Jahre zu einem Umdenken in der Didaktik und zu einer intensiven didaktischen Forschungsarbeit. Ältere didaktische Strömungen (wie in diesem Kap. dargestellt) aus den sechziger Jahren und damit verbundene Qualifikations- bzw. Kompetenzforderungen gewannen zunehmend an Bedeutung. Ferner traten für die Ausbildung von Kompetenzen psychologische Aspekte zunehmend in den Mittelpunkt (siehe folgende Kap.). Was in einem Überblick zu dieser Zeitepoche nicht übersehen werden darf, ist die Möglichkeit, auch andersartige Kompetenzen mit dem Aufkommen der ersten leistungsfähigen Rechner zu definieren: mathematisches Modellieren bzw. Modellbilden (vgl. Kap. 1.5.3). Allerdings ist in dieser Zeit im Rahmen des Rechnergebrauchs noch keine Hinwendung zur anwendungsbezogenen Mathematik neu spürbar.

1.3.1 Der Begriff des mathematischen „Operierens“ bei Aebli und Fricke

In Piagets Arbeiten zur Entwicklung des Denkens bei einem Kind spielen die Begriffe „Operation“ und „Gruppierung“ eine wesentliche Rolle bei der Beschreibung der Ergebnisse seiner empirischen Studien. Vereinfacht ausgedrückt bilden die Gruppierungen Systeme geistiger Operationen. An Piagets Arbeiten knüpfte Aebli [2] in den sechziger Jahren an und verwertete dessen psychologische Theorien auf didaktischem Gebiet: Bei Schülern werden konkrete Handlungen verinnerlicht und durch weitere Abstraktion entstehen sogenannte Operationen. Aebli nannte dann im Schulunterricht zu favorisierende didaktische Regeln, die er mit „operatives Prinzip“ und später

„operatorische Übung“ und „operatives Durcharbeiten“ bezeichnete. Aebli [3] definierte dazu selbst:

> *Das operative Prinzip ist ein Satz von innerlich zusammenhängenden Regeln, die auf bestimmten Vorstellungen über den Ursprung, das Wesen und das Ziel des menschlichen Denkens beruhen. In diesen Vorstellungen ist der Begriff der Operation zentral, und man kann mit einer gewissen Vereinfachung sagen, dass das operative Prinzip einen Unterricht leitet, der das Denken im Rahmen des Handelns weckt, es als ein System von Operationen aufbaut und es schließlich wieder in den Dienst des praktischen Handelns stellt.*

Der „Satz von innerlich zusammenhängenden Regeln“ besteht aus sieben Thesen, die das operative Prinzip beschreiben. Dazu eine verkürzte Auflistung (ebd.):

> *„Anlässe des Lernens sind konkrete und spezifische Problemstellungen.“ Die Produkte des Denkens bzw. der Operationen müssen „angewendet“, „verinnerlicht“, „abstrakt betrachtet“, „durchsichtig rekonstruiert“, „durchgearbeitet“ und „systembildend“ [verarbeitet werden].*

Fricke weitete noch die Überlegungen von Piaget und Aebli aus und sprach von „operativer Methode“. Er kritisierte in seiner Auffassung von Mathematikdidaktik die unterrichtsmethodischen „Prinzipien der kleinsten Schritte“ und den „Grundsatz von der Isolierung der Schwierigkeiten“. Dem brachte er seine Auffassung entgegen [15]:

> *[...] vielleicht wäre es richtiger, um den Zusammenhang der Teile zu betonen, von einem System oder Geflecht von Beziehungen zu sprechen und den Fortschritt des Lernenden mit einer zunehmenden Verfeinerung dieses Netzwerks von Beziehungen zu vergleichen.*

Dabei zeigt sich, dass Fricke der Idee von Aufgabenvariationen sehr nahe war, denn er stellte bereits die didaktischen Vorzüge fest, die sogenannte „verwandte Aufgaben“ haben: Umkehr- oder Gegenaufgaben, Tauschaufgaben, Probeaufgaben, Nachbaraufgaben, die unter Berücksichtigung verschiedener Lösungswege zu einem Strukturbild des jeweiligen Aufgabenkomplexes führen können (vgl. dazu die fachdidaktischen Analysen in Kap. 6).

Das von Fricke bei den Schülern geforderte „bewegliche Denken“ , ausgebildet in heuristisch-forschendem Arbeiten, sieht er wie folgt verwirklicht (ebd., S.97). Es folgt

[…] nach Konfrontierung mit einem echten Problem stets eine breit angelegte Phase des spielerischen Umgangs, des experimentellen Erprobens und Erforschens, auch mit bewusst unzureichenden Mitteln, mit dem Ziel, Erfahrungen zu sammeln, Schwierigkeiten zu erkennen und das mathematische Denken zu aktivieren. Nur auf solche Weise kann der Unbeweglichkeit eines solchen Denkens, das nur auf die vom Lehrer vorzuführende Lösung und ihre Reproduktion wartet, wirksam begegnet werden.

Aeblis und Frickes Ideen fielen auf fruchtbaren Boden, da es galt, die offenen (oder: neu geöffneten) methodischen Fragen durch unterrichtliche Maßnahmen zu beantworten. Fricke sprach von einem „Aktivieren des mathematischen Denkens“. Dabei hätten die ab Kap. 3 vorgestellten Variationen von Mathematikaufgaben einen geeigneten Nährboden dafür geboten.

1.3.2 Das „operative Prinzip“ nach Wittmann

Wittmann sprach zu Beginn der siebziger Jahre in Fortsetzung der Terminologie der „operativen Methode“ von dem „operativen Prinzip“. Im Laufe der Jahre arbeitete er das „operative Prinzip der Mathematikdidaktik“ heraus, wobei über dem anfänglichen Grundschulstoff auch mehr und mehr die Mathematikdidaktik der Sekundarstufen erreicht wurde:

Objekte erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen (Transformationen, Handlungen, …) ausgeführt werden. Deshalb muss man im Lern- und Erkenntnisprozess in systematischer Weise

1. *untersuchen, welche Operationen ausführbar sind und wie sie miteinander verknüpft sind,*
2. *herausfinden, welche Eigenschaften und Beziehungen den Objekten durch Konstruktion aufgeprägt sind,*
3. *beobachten, welche Wirkungen Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben […].*

Das Erkennen und die Bedeutung von Erkenntnis- und Lernprozessen war ihm wichtig. Er selbst bezeichnete das „funktionale Denken“ als einen „Spezialfall“ des „operativen Prinzips“ (ebd.). Krüger erkannte darin auch einen Zusammenhang zum funktionalen Denken …

Auch der von Wittmann beschriebene Dualismus zwischen der Wahrnehmung statischer Objekte und der Wahrnehmung von Prozessen ist ein charakteristisches Merkmal der „Pflege“ funktionalen Denkens. (ebd., S.272)

…, grenzte aber auch „operatives Prinzip“ und „funktionales Denken“ voneinander ab:

> *Dabei wird ein grundlegender Unterschied zwischen operativem Prinzip und funktionalem Denken deutlich: Das operative Prinzip [...] zielt beim Studium der ausführbaren Operationen auch immer auf die Systembildung ab. Dieser Aspekt der Systembildung passt weniger zum Anliegen der Meraner Reformer, die [...] stärker heuristisch-genetische Methoden betonen. [...] Das didaktische Prinzip „Funktionales Denken“ passt daher eher zum erweiterten operativen Prinzip, wo weniger der Gruppierungsbegriff und damit Strukturen oder axiomatische Bezüge betont, statt vielmehr die „Wirkungen von Variationen“ akzentuiert werden. (ebd., S.274)*

Inwieweit „Variationen“ auch „Wirkungen“ zeigen können, gehört zum Herzstück dieser Arbeit und wird noch später beantwortet werden.

1.3.3 Zusammenfassung

In den „Didaktischen Ideen der sechziger und siebziger Jahre“ diskutierte man didaktische und methodische Aspekte des Schulunterrichts. Es war eher zwangsläufig, dass die wechselseitige Beeinflussung der Ziele und Mittel eine korrespondierende Darstellung erforderten.

Polya und Freudenthal werden mit ihren in diese Zeit fallenden, wohl nicht immer beachteten, aber wegweisenden Gedanken zur Mathematikdidaktik in den kommenden Kapiteln aufgegriffen.

Man ist Ende der siebziger Jahre in den Schulen zu sehr damit beschäftigt, den Mangel an Mathematikkompetenz, den die Neue Mathematik im Schülerwissen hinterlassen hatte, erneut mit Stofffülle und Rechenkompetenz zu schließen. Die im Unterricht erhaltenen Ergebnisse stimmten nicht mit den Erwartungen überein (vgl. Aussagen von Artigue in Kap. 1.2).

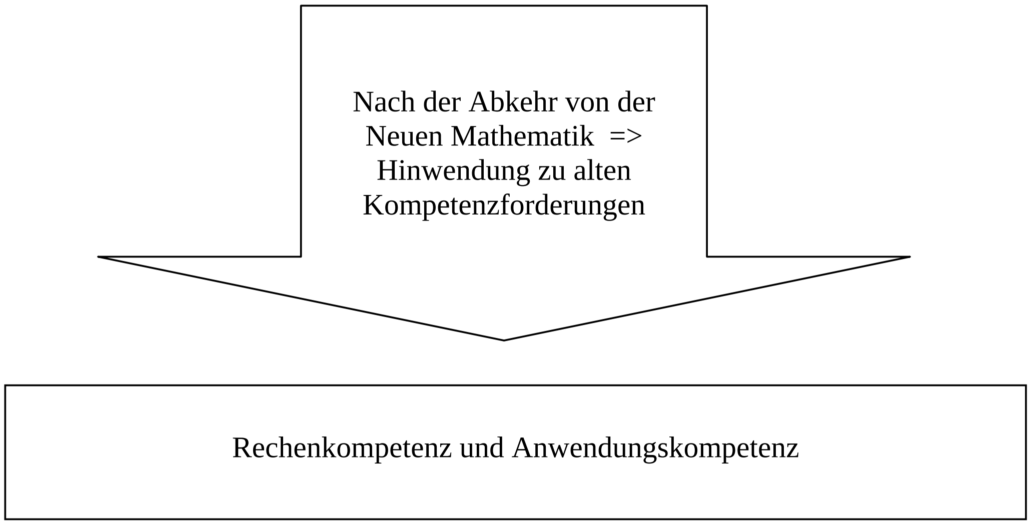


Abbildung 1.3

1.4 Die Nachreformperiode in den achtziger und neunziger Jahren

Eine Bilanz zum Stand des Mathematikunterrichts Anfang der achtziger Jahre zieht Andelfinger [4] und schreibt dazu im „Didaktischen Informationsdienst Mathematik" über die damals herrschende Schüler- und Lehrersicht:

> *Die Realität des Mathematikunterrichts ist für Schüler jedoch oft von Irritation, Erfolglosigkeit, Motivationsmangel und – beim Lehrer – von großer Verlassenheit gekennzeichnet.*
>
> *Ganz offensichtlich spricht der seither übliche Weg, das vorgegebene mathematische System dem Schüler vereinfacht nahezubringen, in der Sekundarstufe I nur eine Minderheit von Schülern an.*

Nahezu visionär und damit seiner Zeit um zwanzig Jahre voraus merkt Andelfinger weiter an:

> *Wir sind zur Zeit weit davon entfernt, begründete Vorschläge für eine schnelle Behebung dieser Probleme machen zu können – nicht zuletzt deshalb, weil ein großer Teil der didaktischen Forschung in neue methodische Modelle investiert und nicht in die Unterrichtsforschung. Dies gilt insbesondere für die Bundesrepublik. (ebd.)*

1.4.1 Neue Tendenzen im Mathematikunterricht

Will man untersuchen, in wie weit Rechen- und Anwendungskompetenz zu Anfang der achtziger Jahre im Mathematikunterricht ausgeprägt waren , so muss man feststellen, dass Anwendungen in der Mathematik der alltäglichen Schulpraxis nach wie vor stark zurückgedrängt waren.

Erst Anfang der neunziger Jahre konnte Schupp [50] feststellen:

> *Allmählich konnten auch größere Teile der Lehrerschaft für den anwendungsorientierten Mathematikunterricht gewonnen werden.*

Blum [6] spricht Mitte der neunziger Jahre von einem „Trend hin zu mehr Anwendungen“, schränkt allerdings ein, dass sich

> *die Anwendungsbeispiele meist auf überschaubare Textaufgaben zu Standardmodellen [beschränken], die sich leicht ins reguläre Curriculum einbetten lassen und abgegrenzten methodischen Zwecken dienen.*

Tietze, Klika, Wolpers [57] fassen zu diesem Thema eine Lehrerbefragung aus dem Jahr 1985 zusammen:

> *Praktisch alle von den Lehrern [...] benannten Gründe wie Zeitmangel, geringe Leistungsfähigkeit der Schüler und Zwänge durch Abiturvorbereitung werden auch in Bezug auf Anwendungsorientierung genannt.*

...und bewerten sie wie folgt:

> *Da Anwendungsorientierung also meist mit unterrichtlichem Aufwand verbunden ist, stellt sich für den Lehrer die prinzipielle Frage, warum er überhaupt Anwendungen im Unterricht berücksichtigen soll, also die Frage, welche Unterrichtsziele er damit erreichen möchte. Die bisherige Auswertung der Interviews lässt die Vermutung zu, dass in dem Bild von der Mathematik, welches bei den meisten Lehrern durch die schulische und universitäre Ausbildung nahezu ausschließlich innermathematisch und weitgehend formal-axiomatisch geprägt ist, der ursächliche Grund für den geringen Stellenwert zu sehen ist, den Anwendungen nach wie vor in der Schulpraxis einnehmen. [...] Anwendungsorientierung wird somit kaum unter dem Gesichtspunkt allgemeiner Ziele gesehen, [...]. (ebd.)*

Tietzes, Klikas und Wolters oben zitiertes [Lehrer]-“Bild von Mathematik“ beleuchtete zum einen die unterrichtende Lehrerschaft mit ihrer subjektiven Hintergrundstheorie. Zum andern zeigte es die pragmatische Problematik, Anwendungsorientierung zu realisieren (Vgl. die Äußerung: „...mit unterrichtlichem Aufwand verbunden ist, ...“).

1.4.2 Die Vorgaben in den Richtlinien zum Mathematikunterricht

Nachfolgend werden die beiden Richtlinien beleuchtet, die ab 1980 im Fach Mathematik an Gesamtschulen ihre Gültigkeit hatten und in dem Zeitraum dieser Untersuchungen verpflichtend waren. Im Jahr 2003 erschienen neue Richtlinien auch für das Fach Mathematik als Reaktion auf die TIMS- und PISA-Studien. Dazu mehr in Kap. 1.5.

Die Richtlinien Mathematik des Landes Nordrhein-Westfalen für Gesamtschulen von 1980 [40], die zwei Jahrzehnte ihre Gültigkeit an den Gesamtschule hatten, beschreiben vor den stofflichen Inhalten in einigen Kapiteln mathematische Kompetenzen. Während vorgängig auf einer eher unverbindlichen Ebene der fachdidaktischen Diskussion Hinweise über Kompetenzen gemacht werden, bezieht man sich im Weiteren explizit auf die Lehrpläne.

Gegen Ende der Richtlinien fanden sich dann didaktische und methodische Hinweise. Im Unterkapitel „Verfahren zur Feststellung von Schülerleistungen“ wurde ein für diese Arbeit wichtiger Aspekt beschrieben:

> *Verwendung von Wissen in modifizierten komplexen oder neuartigen Zusammenhängen: Übertragen im ganzen bekannter, im einzelnen aber modifizierter Methoden auf komplexere Sachverhalte; Auffinden neuer Aspekte, neuer Beziehungen, neuer Lösungswege. (ebd.)*

Forderungen im didaktischen Bereich, wie …

- Hypothesen in seiner eigenen Sprache zu formulieren, diese zu überprüfen und vor anderen zu begründen,
- praktisch zu hantieren und auszuprobieren, […], und

> *Der Mathematikunterricht muß an Problemen orientiert sein, die sowohl aus außermathematischen als auch aus innermathematischen Situationen erwachsen; […] (ebd.),*

…wurden unterstützt durch „methodische Empfehlungen“, wie

> *In der gemeinsamen Arbeit des Kurses / Klasse in fragend / entwickelnden Vorgehweisen, in Gesprächen und Diskussionen über Problemstellungen und -lösungen werden wichtige übergeordnete Ziele erreicht: mit anderen etwas gemeinsam entdecken, […] heuristische Strategien entwickeln, […] gemeinsam Problemstellungen zu überdenken und nach Lösungen zu suchen. (ebd., S. 54)*

Zurück zu den Kompetenzauflistungen am Anfang der Richtlinien. Übergeordnete Kompetenzanforderungen (ebd., S.13) wurden für das Fach Mathematik schrittweise spezifiziert (ebd., S.17) und mündeten nach einer Kritik an dem bisherigen Mathematikunterricht, also dem Unterricht von vor 1980, der „bisher oft einseitig charakterisiert war“ (ebd., S.18), in neuen Forderungen, die dem Ziel dieser Arbeit ausgesprochen entgegenkommen

> *Der Mathematikunterricht muß um folgende Aspekte ergänzt werden: Erarbeitung von Aufgabenstellungen und Problemformulierungen [...].*

Ab dem 1. August 2001 traten die neuen „Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe I - Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen“ [33] verpflichtend in Kraft. Dazu folgend einige bemerkenswerte Hinweise auf die „Kreativität“ von Schülern:

> *Dem kreativen Lernen kommt eine besondere Bedeutung zu. Kreativität und Phantasie tragen zum Aufbau von Fähigkeiten und Fertigkeiten bei, die sich mit problemlösendem Denken, Intuition, Inspiration und Originalität umschreiben lassen.*

Innerhalb der „Aufgaben der Lehrerinnen und Lehrer“ wurde deutlich gemacht:

> *Dabei soll sichergestellt werden, dass Schülerinnen und Schüler [...] systematisch die Fähigkeit aufbauen, selbständig Probleme zu lösen bei zunehmend sicherer Verfügbarkeit über Methoden und Kenntnisse und deren gezielter Ausweitung und Ausdifferenzierung.*

Zusammenfassend schließt der Forderungskatalog mit einer vorsichtigen Erwartung zur Lernkompetenz, die in dieser Formulierung erstmalig in die Diskussion eingebracht wird:

> *Die Zusammenarbeit in der Schule muss sich vor allem darin bewähren, dass alle Bemühungen darauf gerichtet sind, bei Schülerinnen und Schülern eine differenzierte, möglichst mehrdimensionale Lernkompetenz anzubahnen und auszubauen.*

Beide Richtlinien enthalten interessante, aber auch von der vorliegenden Arbeit erfüllte Forderungen. Die neuen Richtlinien übergeben dem unterrichtenden Lehrer größere Spielräume, die „mehrdimensionale Lernkompetenz“ (s.o.) mit Inhalt zu füllen, als es bei den alten Lehrplänen der Fall war. Vergleicht man die Inhalte beider Richtlinien, so kommt in den neuen der

Hinweis auf den Begriff „Kreativität“ (s.o.) erstmalig vor. Dabei liegt es nahe, die erwähnte Mehrdimensionalität damit in Verbindung zu bringen, wobei als Ausprägungen dann der „Aufbau von Fähigkeiten und Fertigkeiten“ sowie die „Verfügbarkeit von Methoden und Kenntnisse“ in Frage kommen. Die alten Richtlinien sprechen in ihren Erwartungen u.a. von der „Erarbeitung von Aufgabenstellungen und Problemformulierungen [...]“ (s.o.).

Fasst man nun die Forderungen, Hinweise und Erwartungen zusammen, so sieht man sie in der Verwendung von Aufgabenvariationen zum großen Teil erfüllt.

1.4.3 Die schulinternen Lehrpläne

Aus eigenen Erfahrungen kann hier gesagt werden, dass die schulinternen Lehrpläne

- ein parallel den Richtlinien und
- entsprechend dem Inhaltsverzeichnisses des in der Fachkonferenz vereinbarten Schülerbuches

aufgelistete Angabe von Unterrichtsinhalten sind. Durch Fachkonferenzbeschluss werden diese für jeden Lehrer verbindlich, wobei der pädagogische Spielraum bislang noch ein Abweichen der Schwerpunktbildung in den einzelnen Stoffgebieten und ein Verändern der unterrichtlichen Reihenfolge in der Schulpraxis bislang ermöglichte. Schulinterne Lehrpläne beinhalten keine methodischen und weitgehend auch keine didaktischen Vorgaben.

Andelfinger [4] diskutiert dazu die grundsätzliche Problematik von schulinternen Lehrplänen wie folgt:

> *Bei einer ersten Analyse der zur Verfügung stehenden Informationen fiel etwas Merkwürdiges auf, eine Art „Bewusstseinsspaltung“. Viele der im Material beschriebenen Probleme und Vorgehensweisen des Unterrichts waren weder auf die offiziellen Stoffkataloge bezogen noch mit ihnen in direktem Zusammenhang. Es kamen „Tiefenschichten“ zutage, die viel mit dem zu tun hatten, was vor 50 und 100 Jahren gelehrt wurde. [...] Eine weitere wichtige Information ergab sich: „die“ Lehrer bauen sich mit hoher schulartspezifischer Übereinstimmung ein Curriculum, das ganz charakteristische Eigenständigkeiten aufweist.*

Vieles von dem, was Andelfinger (s.o.) kritisierte, kann noch heute bestätigt werden. Die schulinternen Lehrpläne sind ein Konstrukt, in das die Eigenständigkeit des Lehrers als eine nicht bestimmbare Größe mit hineinfließt.

Durch die Einführung von Vergleichsarbeiten in den Klassenstufen 7 und 10 wurde ab dem Jahr 2001 die stoffliche Reihenfolge vorgegeben. Man einigte sich in den Fachkonferenzen der Fächer Deutsch, Englisch und Mathematik auf den Inhalt der Vergleichsarbeiten und hatte somit nur noch eingeschränkte Freiheiten im persönlichen Arrangement der Stoffreihenfolge.

Ab dem Schuljahr 2004/2005 war es dem in der Klasse 10 unterrichtenden Lehrer wieder möglich, seine (alten) Spielräume mehr zu nutzen, da die Vergleichsarbeiten in der Klasse 10 durch die Lernstandserhebungen in der Klasse 9 und die landesweiten Abschlussarbeiten am Ende der Klasse 10 abgelöst wurden.

1.4.4 Das „beliefs system“ des einzelnen Lehrers

Das mathematische Weltbild des einzelnen Lehrers (Schülers) sehen Pehkonen/Törner [42] so:

> *An individual´s mathematical beliefs are the compound of its subjective (experience-based) implizit knowledge (and feelings) concerning mathematics and its teaching/learning.*

Beide Autoren beschreiben die Strukturen von „beliefs systems“ allgemein:

> *[...] individual´s beliefs will form their own structure which we will call his belief system. An individual´s belief system is entangled with his knowledge system, in the way that resembles a „plate of spaghetti“. If you try to consider one point separately (and take it away), almost the whole tangle will follow. (ebd.)*

Die Metapher vom „Spaghettiknoten“ weist auf die komplexe Struktur von individuellen Vorstellungen hin, die sich wegen ihrer Verknüpfung gegenseitig beeinflussen. Diese Vorstellungen reichen bei Lehrern im Bereich des Mathematikunterrichts hinein in überkommene Unterrichtsinhalte und Stoffvermittlungen. Kommentiert man Andelfingers „Tiefenschichten“ bzgl. der Lehrereinstellungen zu Mathematikunterricht (siehe Kap. 1.4.3), so sind Defizite innerhalb des Mathematikunterrichts gegen Ende des 20. Jahrhunderts schon recht offensichtlich.

1.4.5 Die Entwicklung der Kompetenzanforderungen im Mathematikunterricht außerhalb Deutschlands

Blickt man über die Grenzen Deutschlands hinaus, so stellt man ebenso kritische Stellungnahmen zum Mathematikunterricht in anderen Ländern fest.

Verschaffel und de Corte [63] schreiben in ihrem 1996 erschienenen Artikel mit Blickrichtung auf die Zeit von 1985 bis 1995 , dass

> *[...] major shifts in the conceptualisation of mathematics as a domain, of mathematical competence as an instructional goal, and of the way mathematical competence should be acquired, have led to important changes in the content and the process of mathematics education.*

Dabei zählen beide Autoren auf, dass die Entwicklungen und Veränderungen die Curricula in folgenden Ländern beeinflusst haben: Kanada, USA, Großbritannien, Niederlande und Australien (ebd.). Deutschland wird dabei nicht vergessen, aber unterschwellig kritisiert, weil diesbezügliche „Veränderungen" - nach Meinung der Autoren - nicht beobachtbar waren. In Übereinstimmung mit der Sichtweise der in 1.4.3 behandelten Richtlinien von Nordrhein-Westfalen führen sie aus, dass (ebd.)

> *[...] concerning mathematical competence as an instructional goal, there is now general agreement that the ultimate objective of student learning is the acquisition of a mathematical disposition rather than a set of isolated concepts and skills. [...] With respect to mathematics, there is nowadays a rather broad consensus that the major categories of aptitudes underlying skilled learning and problem solving are:*
>
> 1. *domain-specific knowledge,*
> 2. *heuristic methods,*
> 3. *metacognitive knowledge and skills, and*
> 4. *affective components like beliefs, motivations and emotions.*

Drei Autoren seien noch genannt, die gegen Ende der neunziger Jahre in ihren Kompetenzforderungen die Interaktionen innerhalb des Unterrichts fokussieren. Kilpatrick [23] sagt:

> *The actions of a practitioner who interprets classroom events within their contents could not be further removed from the inferences made by a researcher caught up in controlling variation, quantifying effects, and using statistical models.*

Daher beantwortet Vergnaud [62] die Frage nach dem Inhalt von Kompetenzansprüchen auch selber:

> *What are competences composed of? They are composed of schemes aimed at facing situations: They are not made of texts. Schemes are the operational side of knowledge. [...] contained in schemes, so as to make the connection between science as a practical*

> *and rational activity, and science as a theoretical and textual enterprise. The concept of operational invariant (concept-in-action and theorems-in-action) is the keystone that makes the connection between practice and theory.*

J. Bishop kommentiert die Effektivität von Mathematikunterricht (ebd., S.34):

> *The pressure for greater effectiveness in mathematics teaching now comes from both the application of business-oriented approaches in education [...] and also from the increasingly politicised nature of educational decision making [...] Education is now seen as an expensive consumer of national funds, and concerns over the perceived quality of mathematical competence in the post-school population have fuelled the pressure.*

1.4.6 Zusammenfassung

Insgesamt betrachtet traten Anwendungen nur als „Kurz-Exkurs“ oder als unterrichtsinhaltliche Vertiefungen auf. Es dominierten eingekleidete Aufgabenstellungen mit eindeutigen Arbeitsaufträgen.

Bis zum Beginn der Ergebnisdiskussion in der TIMS-Studie unterlagen die Kompetenzansprüche gegen Mitte und Ende der neunziger Jahre (und zum Teil bis heute) folgenden skizzierten Einflüssen (Abb. 1.4):

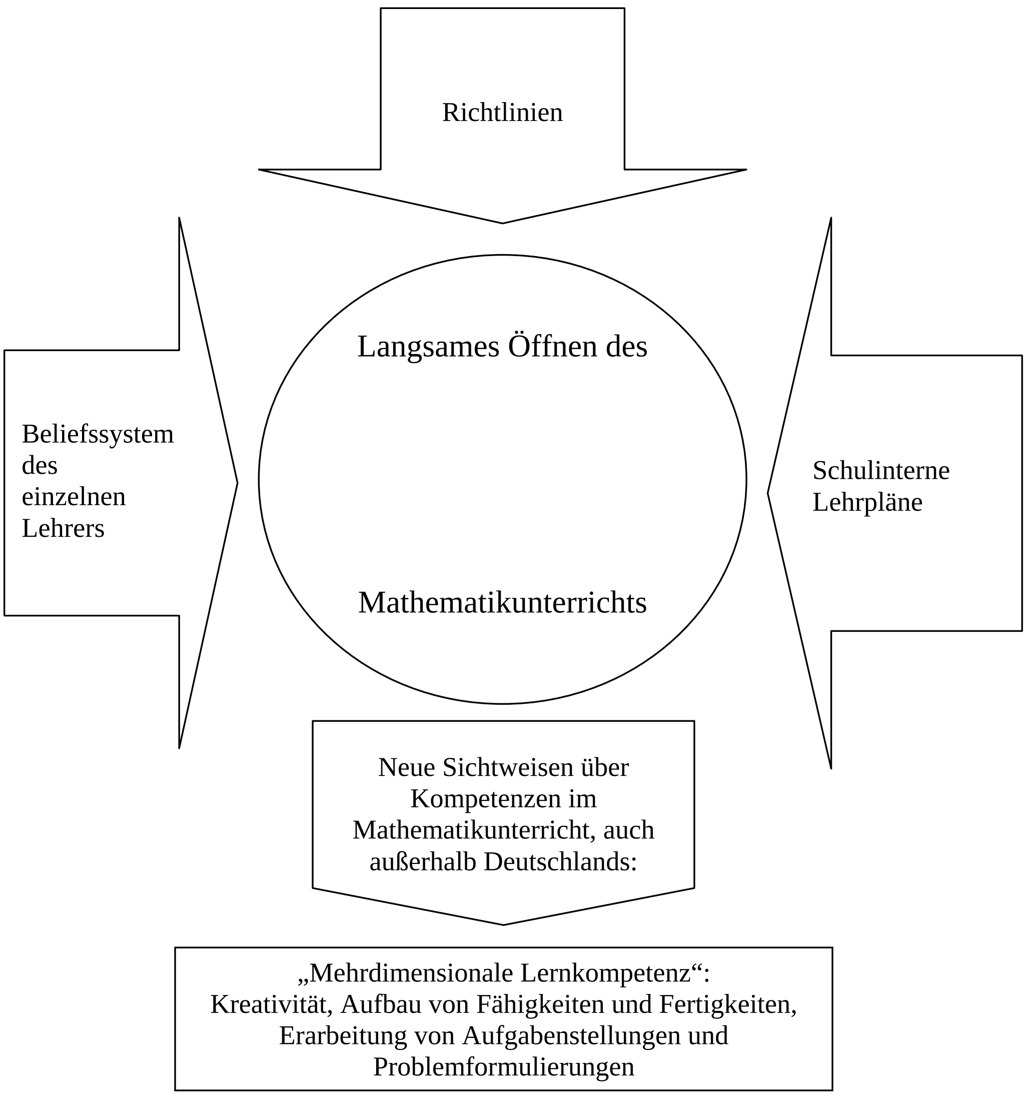


Abbildung 1.4

1.5 Die TIMS- und PISA-Studien

Die im Jahr 1994 durchgeführte TIMS-Studie rückte den Begriff der mathematischen Grundbildung/Literalität (mathematical literacy) ins Blickfeld.

In der später erschienene PISA-Studie wurden dann Kompetenzen einer Diskussion unterworfen. Übernommen im internationalen PISA-Framework [10] lautet die Definition für mathematische Kompetenz:

> *Mathematics literacy is an individual´s capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world [...] as a constructive, concerned and reflective citizen.*

Die deutsche Übersetzung dieser Definition lautet: (Eine) mathematische Grundbildung (wörtlich: Lesefähigkeit/Belesenheit) ist die Fähigkeit eines Einzelnen, die Rolle zu identifizieren und verstehen, die die Mathematik in der Welt spielt (...) als ein konstruktiver, betroffener (im Sinne von engagiert) und denkender Bürger.

Törner [60] übersetzte dazu die in der PISA-Studie genannten Kompetenzen aus dem Bereich des mathematischen Denkens:

> *Unter mathematischen Kompetenzen werden mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verstanden, etwa mathematisches Denkvermögen im Allgemeinen, mathematisches Argumentieren, Modellierungsfähigkeiten, Problemlöse- und Problemformulierungsfähigkeiten, Darstellungsfähigkeiten, technische Fertigkeiten und Fähigkeiten zum Gebrauch mathematischer Sprache, Kommunikationsfähigkeiten über mathematische Inhalte und die Fähigkeit, Hilfsmittel passend einzusetzen.*

Eine wissenschaftliche Definition findet man bei Weinert (siehe Kap.1).

1.5.1 Forderungen nach spezifischen Mathematikkompetenzen aus der Sicht der TIMS-Studie

Als die Ergebnisse der TIMS-Studie (TIMSS: Third International Mathematics and Science Study, durchgeführt von der IEA: International Association for the Evaluation of Educational Achievement) veröffentlicht wurden, waren die Reaktionen und Forderungen unüberhörbar. Dass an deutschen Schulen im Mathematikunterricht viel zu viel auf routinemäßiges Einüben und schematische Lösungsschritte Wert gelegt wurde, brauchte nicht mehr auf den Prüfstand: Diese Art des Mathematiktreibens war gerade in den oberen Rängen durchgefallen bzw. hatte nur einen mittelmäßigen Platz eingenommen.

Die Wichtigkeit einer Erneuerung dokumentierte kurz nach dem Erscheinen der TIMSS-Resultate eine gemeinsame Erklärung der Deutschen Mathematiker Vereinigung (DMV), der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GMD) und des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU):

> *... mögen die Richtung andeuten, in der sich der Mathematikunterricht verändern muss:*

- mehr selbständiges und aktives Mathematiktreiben,
- mehr inhaltliches Argumentieren und Problemlösen,
- systematisches Wiederaufgreifen und Vernetzen von behandelten Inhalten. [1]

Weigand schreibt in seinen „Überlegungen zur TIMS-Studie“ über den japanischen Mathematikunterricht:

> *Japanische Schüler nehmen nicht anderen oder mehr Stoff durch als deutsche Schüler , sondern denselben Stoff variationsreicher [65]*

Wurz [70] dazu stellt fest:

> *Für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in Deutschland kann es nur darum gehen, die festgestellten Defizite schonungslos zu analysieren und schleunigst die richtigen Konsequenzen zu ziehen [...]:*

- Der Anteil an Routineaufgaben ist zu hoch. Er sollte zugunsten des Anteils an Problemlöseaufgaben [...] reduziert werden.
- [...] wird zu eng geführt und weitgehend nur lineares Denken zugelassen. Eine veränderte inhaltliche und methodische Unterrichtsgestaltung sollte divergentes Denken zulassen.
- [...] Bei einer bewussten Integration von Um- und Irrwegen in das Unterrichtsgeschehen kann jedoch ein erhebliches Potential an Lernmöglichkeiten genutzt werden.
- [...] Reflexionsphasen über Lösungswege kommen zu kurz.
- Die Vielfalt mathematischer Denkweisen wird [...] im Unterricht kaum erkennbar

In einem Unterrichtsbeispiel zieht Wurz folgenden Schluss (ebd., S.393):

> *Besonders ertragreich sind Übungen im Mathematikunterricht, wenn variiert werden kann, d.h. wenn die gegebene Figur verändert werden kann.*

Mit Hilfe der TIMS-Studie und ihrer Auswertungen wurde ein Weg (erneut) gewiesen: hin zu einem schülerseitigen Arbeiten in und an der Mathematik. Die Schülerinnen und Schüler sollen ein „Mathematiktreiben“ vermehrt aufbauen, sie sollen innerhalb der Aufgaben ein weitreichenderes Denken entwickeln, das Vernetzungen zulässt, die auch in der Veränderung von Aufgaben und ihrer erneuten Behandlung mündet. Damit eröffnete die Studie Wege hin zu den grundsätzlichen Gedanken für diese Arbeit (siehe Kap.3).

1.5.2 Die mathematische Grundbildung in der PISA-Untersuchung

Neubrand [39] grenzt den Begriff der mathematischen Grundbildung, „mathematical literacy“, wie folgt ab:

> *Mit dem Begriff „mathematical literacy“ soll also zum Ausdruck gebracht werden, dass es in einem Test gerade nicht um die in den Curricula festgelegten Wissenselemente und Fertigkeiten geht.*

In Bezug auf die Rahmenkonzeption von PISA [11] ist der Hinweis zu finden:

> *Der Begriff Grundbildung (literacy) wurde gewählt, um zu betonen, dass mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten, wie sie im traditionellen Curriculum der Schulmathematik definiert werden, im Rahmen von OECD/PISA nicht im Vordergrund stehen. Statt dessen liegt der Schwerpunkt auf der funktionalen Anwendung von mathematischen Kenntnissen in ganz unterschiedlichen Kontexten und auf ganz unterschiedliche, Reflexion und Einsicht erfordernde Weise.*

Es ist bemerkenswert, dass mit dieser Rahmenkonzeption eigentlich nicht „Neues“ getestet wird. Der Inhalt des Tests bezieht sich nicht auf einzelne stoffliche Kapitel sondern ist ein Abtesten des Umfelds der betreffenden Stoffeinheit. Es wurden also nicht die traditionellen „skills and routines“ erfasst, sondern kontextgebundene, nichtisolierte und problemorientierte Aufgaben als Inhalt zur Überprüfung der mathematischen Grundbildung. In dieser Zielsetzung macht sich der Wert von „Vernetzungen“ (siehe obiges Kap.) deutlich. Mathematikaufgaben sollen ein weitmaschiges Netz bieten, mit denen divergentes Denken ermöglicht wird. An diese Stelle der Forderungen und Erwartungen im Hinblick auf mathematische Kompetenzen wenden sich die in dieser Arbeit behandelten Aufgabenvariationen.

1.5.3 Mathematikkompetenzen – der Ansatz aus der internationalen PISA-Erhebung

Wie bereits erwähnt wird in der PISA-Studie nicht mathematisches Begriffs-, Fakten- und Prozedurenwissen abgefragt. Vielmehr liegt der Schwerpunkt der Untersuchung darauf, festzustellen, ob mathematisches Wissen und Können von den Schülerinnen und Schülern funktional eingesetzt werden kann.

Neubrand [38] schreibt dazu in einer Schrift, die sich insbesondere an das „Bildungsmanagement = Schulleitung und Kollegien“ wendet:

> *Diese Konzeption [...] wird auch in Deutschland als Zielorientierung der Mathematikdidaktik angesehen, ist in der schulischen Realität aber eher wenig umgesetzt. [...] Dann kann man Aufgabenlösen als einen „Modellierungsprozess“ begreifen.*

An anderer Stelle [37] definiert der gleiche Autor „die Beherrschung von Modellierungsprozessen“ mit der

> *Fähigkeit, inner- oder außermathematische Problemsituationen in geeignete mathematische Terminologie transformieren, mittels dieser lösen und die Ergebnisse wieder auf die Ausgangssituation beziehen zu können*

Reiss/Törner [44] unterstreichen diesen Gedanken mit der Forderung, dass

> *Unterricht in stärkerem Maß die Schülerinnen und Schüler zur Eigenaktivität anregen [müsste].*

Die Mathematik-Expertengruppe [38] von OECD-PISA organisierte das internationale PISA-Framework um

> *die beiden Hauptaspekte [...]*

- mathematical competencies [und]
- mathematical big ideas.

Dazu erläutert Törner [59] Beispiele für „big ideas“ mit

- chance [Aussicht],
- change and growth [Variation und Zunahme/Abnahme],
- dependency and relationships [Bedingungen und Beziehungen],
- space and shape [Raum und Gestalt].

Verfolgt man nun eine Einzelerfassung mathematischer Kompetenzen, so lautet die (hier abgekürzte) Liste der „competencies“ wie folgt:

„Mathematical thinking skill. This includes

- *posing questions [...],*
- *knowing the kinds of answers [...],*

Mathematical argumentation skill. This includes

- *possessing a feel for heuristics;*
- *and creating mathematical arguments.*

Modelling skill. This includes

- *structuring the field or situation to be modelled; [...]*
- *working with a mathematical model; [...]*
- *communicating about the model and its results; [...]*

Problem posing and solving skill. This includes

- *posing, formulating, and defining different kinds of mathematical problems;*
- *and solving different kinds of mathematical problems in a variety of ways.*
- *Representation skill. [...]*
- *Symbolic, formal and technical skill. [...];*

Communication skill. This includes

- *expressing oneself [...] on matters with a mathematical content [...] and*
- *understanding others‘ written or oral statements about such matters.*
- *Aids and tools skill.“*

Die didaktischen Hintergründe der mathematischen Grundbildung und der Erwartungen mathematischer Kompetenzen werden verständlicher, wenn man exemplarisch dazu die Positionen von Freudenthal und Schoenfeld kurz darlegt:

Die Veröffentlichung Freudenthals [14] kann als wegweisend angesehen werden , damit man ihn versteht:

> *Ich möchte, dass der Schüler nicht angewandte Mathematik lernt, sondern lernt, wie man Mathematik anwendet.*

Damit stellt Freudenthal sein Bild von Mathematik und letztlich sein Verständnis über das Lehren und Lernen von Mathematik heraus. Mathematik kann der Schüler nur durch eine aktive Auseinandersetzung lernen und dieser Prozess muss ihm durch den Lehrenden ermöglicht werden. Im PISA-Framework [41] wird dazu eine Aussage Freudenthals zitiert:

> *Our mathematical concepts, structures and ideas have been invented as tools to organise the phenomena of the physical, social and mental world.*

Es ist nun verständlich, dass bei der Übernahme von Freudenthals Ideen in das PISA-Framework die traditionellen Curricula mit ihren oft isolierten Fertigkeiten ohne Kontextbezug nicht im Mittelpunkt des PISA-Tests stehen konnten.

Schoenfeld [48] sieht auf seine eigene Schulzeit zurück und argumentiert von seinen Erfahrungen her, dass die Fähigkeit gefragt ist -

> *to make use of various modes of mathematical thought and knowledge to make sense of situations we encounter as we make our way through the world.*

Auch er tritt für breitgefächerte Fähigkeiten ein, mit denen man sich in seinem beruflichen und privaten Leben bewähren kann und die im Unterricht konsequenter angesprochen werden sollten (ebd.). Die Bezüge zu PISA werden hier offensichtlich.

Erneut wandte man sich in den Stellungnahmen und Erwartungen gegen ein nur routinemäßiges Bearbeiten von Aufgaben. Deutlich wurden die Forderungen darin, dass die Schülerinnen und Schüler Mathematik anwenden sollen innerhalb der einzelnen Aufgaben und in ihrem Leben.

Die festgestellten Defizite waren der Grund, einen Handlungsbedarf zu reklamieren. Die vorliegenden Untersuchungen sind ein Versuch, diesen Handlungsbedarf zu decken.

1.5.4 Schulministerielle Vorgaben in NRW

Das Schulministerium des Landes Nordrhein-Westfalen/BRD gab im Jahr 2003, also nach den in dieser Arbeit dargestellten Untersuchungen, in die Mathematik-Fachkonferenzen eine Kompetenz-Übersicht. Vergleicht man diese mit den Kompetenzen, die in der PISA-Studie gefordert werden (siehe Kap. 1.5.3), so sind die Reflektionen dahingehend deutlich ablesbar. Mit der Überschrift „Kompetenzen im Fach Mathematik“ (Anlage 1) wurden die unterschiedlichsten Kompetenzen benannt:

> *„Kompetenzen aus dem Bereich*
>
> 1. *des mathematischen Denkens, ...*
> 2. *des mathematischen Argumentierens, ...*
> 3. *des mathematischen Modellierens, ...*
> 4. *des mathematischen Problemlösens, ...*
> 5. *der mathematischen Repräsentation, ...*
> 6. *Symbolische, formale und algorithmische Kompetenzen, ...*
>
> *Kompetenzen im Bereich*
>
> 7. *der mathematischen Kommunikation, ...*
> 8. *der Nutzung von Hilfsmitteln und mathematischen Werkzeugen, ...“*

Dazu gab das Schulministerium NRW/BRD den Mathematiklehrern als eine weitere Übersicht die „Stufen mathematischer Kompetenz“ (Anlage 2) an die Hand.

Dieser Katalog schloss mit der Definition des (neuen) Begriffs des „Modellierens“ ab. Er lehnte sich aber an eine weitere Ausgabe der ministeriellen Behörde mit der Überschrift „Übersicht über die Kompetenzstufen der mathematischen Grundbildung nach PISA“ (Anlage 3):

> *Das Bearbeiten problemhaltiger Situationen mit Hilfe der Mathematik kann als Modellierungsprozess angesehen werden, [...]*

Ab dem Schuljahr 2004/2005 wurde nur noch eine Vergleichsarbeit, und zwar im 7. Schuljahr, geschrieben. Statt dessen wurden in den gleichen Fächern, Mathematik, Deutsch und Englisch, die „Zentralen Lernstandserhebungen in der Jahrgangsstufe 9“ neu eingeführt. Zum Fach Mathematik ist den „Informationen für Lehrerinnen und Lehrern“ (Anlage 4) zu entnehmen (S. 6):

> *Die Aufgaben beziehen sich auf alle in den Kernlehrplänen ausgewiesenen inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzbereiche. [...] Der jährlich wechselnde Schwerpunkt im Fach Mathematik liegt auf jeweils einem der vier prozessbezogenen Kompetenzbereiche. Im Jahr 2004 wird das „Modellieren“ akzentuiert.*

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit unterstützten bereits im Vorhinein die später aufgestellten Erwartungen an die Eigenaktivität der Schüler. Schüler sollten und sollen bis heute aktiviert werden, Denkprozesse zu eröffnen und zu verfolgen. Dabei unterstützt das Variieren von Mathematikaufgaben diese Ansprüche.

1.5.5 Zusammenfassung

Es ist der Wunsch von Eltern, Lehrern, Schülern und Bildungspolitikern, ja von der gesamten Gesellschaft, dass der Mathematikunterricht Kompetenzen entwickelt. Dabei wird, vergleicht man die historische Entwicklung, nur selten im Detail festgelegt, wie man dieses Ziel erreicht. Früh war das Bemühen, Rechenkompetenz in Verbindung mit der Kompetenz zu bringen, Mathematik auch im Alltag anwenden zu können. Das Anwenden im Sinne des Einbeziehens und Berechnens von Alltagssituationen erfuhr im Laufe der Jahrzehnte einen Bedeutungswandel. Aus dem Anwenden von „Rechenkunst“ im Mathematikunterricht entwickelte sich, auch bedingt durch den sog. „Sputnikschock“ eine vielschichtige Forderung nach einem Verwenden können von Mathematik innerhalb von Problemaufgaben.

Ein wie immer angelegter historischer Exkurs durch die Didaktikgeschichte des Kompetenzbegriffs zeigt die Schwierigkeit auf, eine verbindliche und von allen akzeptable Leitlinie im Sinn einer Präzisierung des Kompetenzbegriffs zu finden. Das hier angegangene Vorhaben wurde flankiert von psychologischen Aspekten, die in den siebziger Jahren hinzukamen. Mit eingeschlossen war der Versuch, durch die Einführung der Neuen Mathematik die aufgedeckten Defizite zu beseitigen. Fragen nach den Formen des kognitiven Durcharbeitens von Mathematikaufgaben wurden gestellt und auch in die Richtlinien (von 1980 und 2001) eingearbeitet. Trotz mancher unverbindlicher fachdidaktischen Diskussionen bahnte sich ein Blickpunktwechsel an. Unterstützt von Mathematikdidaktikern wie Freudenthal, forciert mit den Bilanzen aus den TIMS- und PISA-Untersuchungen (2000 und 2001), bekam man einen realistischeren Blick für die intendierten und tatsächlich erreichten Kompetenzen.

Zieht man nun eine Bilanz aus den Forderungen, wie Mathematikunterricht organisiert und strukturiert sein soll, so entwickelt sich folgende Übersicht:

Mathematikunterricht soll

- kognitives Wissen,

- Agieren (Argumentieren, Modellieren, Problemlösen, Vernetzen, Reflektieren, divergentes Denken) und
- das Einbringen von Sprache und Hilfsmitteln (Repräsentieren, Kommunizieren, Nutzen von Hilfsmitteln und Werkzeugen)

bei den Schülern bewirken.

Ein interessanter und in dieser Arbeit untersuchter Anteil des Forderungskatalogs ist das Agieren, das selbständige Mathematiktreiben von Schülerinnen und Schülern an deutschen Schulen .

Zu den Möglichkeiten des methodischen Umsetzens der Forderungen in dem Bereich der Aufgabenstellungen, der in dieser Arbeit auch im Fokus der Betrachtungen steht, schreibt L. Hefendehl-Hebeker [18]

> *Ein geeignetes Mittel, den Schülerinnen und Schülern Spielräume für eigentätiges Erkunden und Problemlösen zu gewähren, sind offene Aufgabenstellungen. Die Offenheit kann sich beziehen [...] auch auf mögliche Variationen, Erweiterungen, Fortsetzungen, Verallgemeinerungen, auf ein weiteres 'Öffnen' der zunächst vielleicht eher eng gefassten Fragestellung (nach Herget [19]).*

Fasst man die wesentlichen Kompetenzforderungen der TIMS- und PISA-Studien zusammen -

Mathematikkompetenzen aus der TIMS-Studie

Mehr selbständiges und aktives Mathematiktreiben
Mehr inhaltliches Argumentieren und Problemlösen
Systematisches Wiederaufgreifen und Vernetzen von behandelten Inhalten

Mathematikkompetenzen aus der PISA-Erhebung

Mathematical thinking skill
Mathematical argumentation skill
Modelling skill
Problem posing and solving skills
Representation skill
Symbolic, formal and technical skills
Communication skill
Aids and tools skills

Abbildung 1.5

- so bieten Aufgabenvariationen eine vielversprechende Möglichkeit, bedeutende Teile dieser Kompetenzforderungen in den hier ausgewerteten Untersuchungen zu erfüllen.

Kapitel 2

Problemlösekompetenz im Mathematikunterricht

In der Didaktikliteratur stößt man immer wieder auf die Forderung, Problemlöseeigenschaften und Heurismen bei Schülern einzuüben. Der recherchierende Leser trifft dabei auch auf Leibnitz (1646-1716), der das Lernen des Problemlösens mit dem Lernen einer Sprache verglich.

Siebeneicher [52] erinnert daran:

> *Die damaligen Fragen an den Mathematikunterricht sind ja gar nicht so verschieden von denen, die sich heute stellen.*

Mit „damaligen Fragen" knüpft er an das Memorandum [34] an, das 1962 das Ziel hatte, den Mathematikunterricht an amerikanischen High Schools zu verbessern.

2.1 Problem-Solving-Aufrufe zur Kompetenzzunahme

Es ist nur konsequent, wenn vom „National Council of Teachers of Mathematics" (NCTM) [35] empfohlen wurde, dass „Problemlösen im Zentrum des Mathematikunterrichtes der achtziger Jahre stehen sollte", dann auch den Rückblick an der schon vor 1980 beginnenden Problem-Solving-Ära in den USA festzumachen. Lester [30] glaubt, die folgenden Epochen in seinem „Overview of Problem-Solving Research [...] 1970-1994" identifizieren zu können, indem er auflistet:

> *1970-1982: Isolation of key determinants of problem difficulty;*
> *identification of characteristics of successful problem*

solvers; heuristics training
1978-1985: Comparison of successful and unsuccessful problem solvers; strategy training
1982-1990: [...] relation of affects/beliefs to problem solving [...]
1990-1994: [...] problem solving in context [...]

In diese Zeit fallen zwei bemerkenswerte Aufsätze. Einmal von Kilpatrick [21], der 1978 „a useful classification of problem solving variables“ forderte, und von Schoenfeld, der 1979 von „a long way from success“ spricht, um erfolgreich zu sein „in identifying truly useful problem-solving strategies“.

Schoenfelds [47] Hinweise auf Problemlösestrategien sind zu diesem Zeitpunkt zwar nicht neu, doch er griff damit einen damals vielfach unbeachteten Aspekt in der didaktischen Forschung auf. Das von ihm angesprochene „identifying“ beim Problemlösen hinsichtlich unterschiedlicher Schritte und Stufungen reicht in die Teilbereiche mathematischer Kompetenz, um die es auch in dieser Arbeit geht.

Innerhalb des Problemlösens entwickeln sich Kalküle möglicher Strategien, die einen unentbehrlichen Bereich der mathematischen Kompetenz aufweisen. Unentbehrlich deswegen, weil eine damit verbundene geistige Beweglichkeit dann auch eine Zunahmen von Kompetenzen plausibel erscheinen lässt.

2.2 Stufungen von Problemlöseprozessen

Angesichts der diesbezüglich vielfältigen Veröffentlichungen folgt hier nur eine Auswahl von zwei Vorschlägen, um Schulbuchaufgaben bzw. Problemaufgaben im Mathematikunterricht zu lösen. Es ist eher eine triviale Erkenntnis, dass Problemlöseprozesse in Schritten bzw. Stufen erfolgen. Identifiziert man diese Stufen, so erkennt man Lösungswege bzw. Lösungsstrategien, die an Schüler zu vermitteln sind.

Einmal sei auf Polya [43] (1945) aufmerksam gemacht , der den Planungsaspekt in seinen Lösungsstrategien insbesondere aufgreift:

1. *Verstehen des Problems.*
2. *Entwerfen eines Plans.*
3. *Durchführen eines Plans.*
4. *Rückschau.*

Weiter sei auf Schoenfeld [46] (1979) verwiesen. Er nennt Strategien zur Lösung einer Aufgabe zur vollständigen Induktion.

> 1. *Draw a diagram if at all possible.*
> 2. *If there is an integer parameter, look for an inductive argument.*
> 3. *Consider arguing by contradiction or contrapositive.*
> 4. *Consider a similar problem with fewer variables.*

Dabei gibt er als letztes mit der Aufforderung ein „similar problem“ zu entwerfen auch einen Hinweis, die Aufgabe weiter mit neuen Ideen zu vernetzen.

Vergleicht man die zitierten Strategien zum Lösen von Aufgaben bzw. Problemaufgaben, so haben sie gemein, dass

- sie das Problemlösen in Phasen unterteilen.
- die Phasen ineinander übergehen.
- die methodischen Mittel bzw. die angewandten Heurismen als das eigentlich von Schülern zu Lernende ansehen.

2.3 Heuristische Methoden

Polya [43] definierte „Heurismen“ bzw. „Heuristik“ wie folgt:

> *Die Heuristik beschäftigt sich mit dem Lösen von Aufgaben. Zu ihren spezifischen Zielen gehört es, in allgemeiner Formulierung die Gründe herauszustellen für die Auswahl derjenigen Momente bei einem Problem, deren Untersuchung uns bei der Auffindung der Lösung helfen könnte.*

Zimmermann [72] setzte sich dafür ein, in der Schule die „Gründe herauszustellen“ (nach Polya, s.o.) bzw. „heuristische Strategien“ (Zimmermann, s.u.) einzuüben und in den Mathematikunterricht zu integrieren:

> *Heuristische Strategien müssen mit der gleichen Ernsthaftigkeit unterrichtet werden, wie z. B. das Lösen quadratischer Gleichungen. [...] Es muss genügend Gelegenheit zum (aktiven) Üben einzelner Strategien bei verschiedenen Aufgaben (passende und unpassende!) gegeben werden. Unerlässliche Voraussetzungen zum erfolgreichen Problemlösen ist das Vorhandensein bzw. der Ausbau eines genügend reichhaltigen und beziehungshaltigen Netzes von Kenntnissen und Assoziationen. (ebd., S.18)*

Fragt man nun explicit nach heuristischen Strategien, also Methoden zur Lösung von Mathematikaufgaben/Problemaufgaben, um im „problem solving“ erfolgreich zu sein, so kann eine Anleihe bei den „geistigen Grundtechniken“ nach Zech [71] entnommen werden:

- *Vergleichen (Erfassen von Unterschieden)*
- *Ordnen (Herstellen einer Reihe von Merkmalen)*
- *Abstrahieren (wesentliche Merkmale von unwesentlichen trennen)*
- *Verallgemeinern*
- *Klassifizieren (Unterscheiden von Merkmalen)*
- *Konkretisieren (Übertragen vom Allgemeinen zum Speziellen)*
- *Formalisieren (Codieren von Informationen)*
- *Analogisieren (gleiche Struktur bei verschiedenen Phänomenen erkennen)*

Neben anderen Autoren listet er die für den Schulunterricht wichtigsten methodischen Mittel bzw. Strategien mit am deutlichsten auf. Hierbei sei angemerkt, dass Zech die Bezeichnung „Strategien“ ja im Sinne von (heuristischen) Lösungsschritten verwendet und dass diese und andere Strategien auch von einem anderen Blickwinkel aus betrachtet werden können: Nicht nur als einzelne oder vernetzte methodische Mittel sondern auch als Problemgenerierungsmöglichkeiten. Dieser interessante, in eine andere Richtung weisende Aspekt wird nachfolgend noch aufgegriffen.

Dazu wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels noch intensiv auf Zimmermanns Forderung eingegangen:

> *Ganz wesentlich für die aktive Auseinandersetzung mit der Mathematik ist nämlich zusätzlich das selbständige Finden von Problemen und die Weiterentwicklung von Fragestellungen. (ebd., S.19)*

2.4 Die Problem-Posing-Idee(n)

Bevor die Problem-Posing-Idee(n) in diesem Kapitel aufgezeigt werden, ist die Frage berechtigt, welche defizitären Ansätze denn ein ausschließliches Festhalten am methodischen Konzept der Problemlösestrategien möglicherweise hätte?

Die Idee, Schüler im Mathematikunterricht Aufgaben selbst formulieren und lösen zu lassen bzw. gelöste Aufgaben neu formulieren zu lassen, ist bereits älterer Natur. Schon 1936, möglicherweise gibt es noch frühere Stellungnahmen in dieser Hinsicht, schrieben Connor und Hawkins [8] :

> *Students generate their own problems, improved their ability to apply arithmetic concepts and skills in solving problems.*

So wurde Polyas vierter Strategiepunkt [43] „Rückschau“ in der Entwicklungszeit der Problem-Posing-Ideen als (verdeckter) Hinweis interpretiert, nach der Lösung einer Aufgabe „Fragen“ zur Aufgabe aufzuwerfen.

Sowder [54] (1986) geht in ihrem Artikel „The Looking-back Step in Problem Solving“ auf „Polya's steps“ ein, da speziell auf „. . ., and look back.“, und argumentiert:

> *But looking back has even more to offer than just the possibility of finding a more elegant or simpler solution. Looking back can give our students a glimpse at an exciting part of mathematics, the creation of conjectures.*

In ihrem „summary“ hält die Autorin dann fest:

> *Looking back at a problem after its solution should at least on occation include the generation of new problems.*

Der „Problem-posing“-Gedanke wurde 1991 in das US-amerikanische Mathematikcurriculum NCTM [36] aufgenommen:

> *Students should be given opportunities to formulate problems from given situations and create new problems by modifying the conditions of a given problem.*

Zimmermann berichtete *„über pädagogische Aspekte [. . .] und Heuristik“* als er in seinem Aufsatz über *„Mathematisches Problemlösen und Heuristik in einem Schulbuch“* auf das Thema *„problem-posing“* kam:

> *Wichtig sind vor allem interessante, herausfordernde Probleme, für deren Lösung dann auch verschiedene heuristische Verfahren eine Rolle spielen, aber eher implizit, von den Schülerinnen und Schülern selber „konstruiert“ und so von einer ganz anderen Tragfähigkeit.*

Die Hoffnung, dass *„problem-posing“* im Mathematikunterricht eine Zunahme der mathematischen Kompetenz bewirken kann, ist groß. Sie spiegelt sich in der Art wider, wie in Metaphern die Zuversicht ausgedrückt wird, mit dieser Methode des Unterrichtens die mathematische Kompetenz bei Schülern positiv zu beeinflussen.

So ist es für Silver [53] klar

> *that problem-posing tasks can provide researchers with both*
>
> - *a window through which to view students' mathematical thinking and*
> - *a mirror in which to see a reflection of student's mathematical experiences.*

Walter [64] drückt ihre Wünsche aus mit der Überzeugung „*...we can use problem posing to help students uncover mathematics.*“ und an anderer Stelle „*...that one can create not only new problems but deeper insights about anything that is given by modifying.*“ (ebd., S.XIV).

Zusammenfassend lautet die Antwort auf die anfangs gestellte Frage: Beharrt man darauf, dass Schülerinnen und Schüler sich nur an heuristischer Vorgehensweisen bedienen, können verdeckte kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten übersehen werden. Implizite Qualifikationen würden verborgen bleiben und damit nicht gefördert werden. Denn: Übergibt man den Schülern eine neue Möglichkeit der Mitbestimmung, nämlich aus bereits gelösten Aufgaben neue Aufgaben selbst zu entwerfen und diese dann zu lösen, so besteht die Hoffnung, dass dadurch implizite Begabungen explizit ausgedrückt werden können.

2.4.1 Die Definition von „Problem-posing“ nach Silver

Silver definiert „mathematical problem posing“ in zweierlei Hinsicht:

> *Problem posing refers to both*
>
> - *the generation of new problems and*
> - *the re-formulation, of given problems.*
>
> *Thus, posing can occur before, during, or after the solution of a problem.*

Daraus ergibt sich folgende Übersicht :

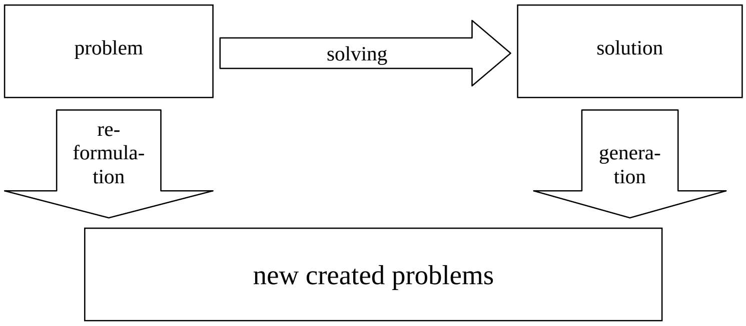


Abbildung 2.1

2.4.2 Weitere Problem-Posing-Argumentationen

In ihrem Buch *„The art of problem posing"* gehen Brown/Walter [64] auf die Startfragen ein, die zu Beginn des Problem-Posing-Prozesses stehen könnten. Allen voran ihre in der Literatur bekannteste Frage: *„What if not?"* (dt.: Was wäre wenn …? Oder: Was wäre wenn nicht?) Sie sprechen dabei von -

A Handy List of Questions

Nachfolgend ein kurzer Auszug aus ihrer umfangreichen Liste von „starting questions":

- *Is there a formular?*
- *Is there a counterexample?*
- *What is constant; what is variable?*
- *When is it relevant?*
- *What do they have in common?*

Den Dualismus der Silver'schen Definition (siehe Kap. 2.4.1) drücken weitere „Problem-Posing-Autoren" in ihrer Argumentation folgendermaßen aus: Davis [9] sagt dazu: „Problem formulation and problem solution go hand in hand, each eliciting the other as the investigation progresses."

Kilpatrick [22] argumentiert: „Problem formulating should be viewed not only as a goal of instruction but also as means of instruction."

Silver unterstreicht seine Definition folgendermaßen:

> *Problem posing can also occur after having solved a particular problem, when one might examine the conditions of the problem to generate alternative related problems. (ebd., S.20)*

Dabei sind ihm die Lösungsgrenzen durchaus bekannt:

> *When one poses a problem, one may not know whether or not the problem will have a simple solution, or any solution at all. (ebd., S.26)*

2.4.3 Ergebnisse aus Problem-Posing-Unterrichtungen

Exemplarisch sei auf zwei Autoren aufmerksam gemacht, die verdeutlichen, mit welchen Ergebnissen man bei einem Problem-Posing-Unterricht rechnen kann:

Die Ergebnisse von Hoehn [20]:
Hoehn wandte die Problem-Posing-Methode im Geometrieunterricht an und erreichte dabei als Resultate:

> *In posing these problems, the careful reader will note that we have used some of the same techniques that are especially useful for problem solving, for example:*
>
> - *special cases,*
> - *generalization,*
> - *related problems,*
> - *converses,*
> - *symmetry,*
> - *useful notation,*
> - *accident,*
> - *previous results,*
> - *useful figures,*
> - *looking back,*
> - *patterns and others.*
>
> *All that one needs to be a problem poser is first to be a problem solver. The two processes are inseparable.*

Die Ergebnisse von English [12]:
English wendet im Mathematikunterricht ihrer Klasse die Problem-Posing-Methode an Albrecht Dürers *„magischen Quadraten“* (ebd., S.176) an und stellt abschließend fest:

> *More specifically, problem-posing can*
>
> - *promote a spirit of inquisitiveness and generate more diverse and flexible thinking;*
> - *encourage children to take greater responsibility for their learning;*

- *alert both teachers and children to misunderstandings and preconceptions;*
- *enhance children's problem solving, as well as reinforce and enrich basic concepts;*
- *remove erroneous views on the nature of mathematics; and*
- *dissipate common fears and anxieties about mathematics learning.*

Es sind ermutigende Hinweise, dass man mit dieser Unterrichtsmethode eine Kompetenzzunahme im Mathematikunterricht erreichen kann.

2.5 Die zeitliche Handhabung von Problem-Solving- und Problem-Posing-Aufgaben im Schulunterricht

Zimmermann betrachtet in einem seiner Aufsätze über „Mathematisches Problemlösen und Heuristik in einem Schulbuch“ exemplarisch das Einbinden von Problemen in die Schulbuchliteratur und bewertet es als positiv. Er kritisiert wohl auch das Niveau der Aufgaben mit deren erhöhter „Einstiegsschwelle“, weist aber in einer in der didaktischen Literatur bisher seltenen gefundenen Ehrlichkeit auf ein Problem hin, das allzu häufig den Mathematiklehrer vor Ort hemmt, reichhaltiger mit Problem-Solving- und Problem-Posing-Aufgaben umzugehen:

> *Es mangelt nicht an Bemühungen, diesem Anliegen auch in Schulbüchern durch ein reichhaltiges Angebot an entsprechenden Problemen nachzukommen. Allerdings wird die Einstiegsschwelle für „normale“ Schülerinnen und Schüler dadurch erhöht, dass diese oftmals auf frustrierende „alles-oder-nichts-Probleme“ treffen. Oder man konzentriert sich*
>
> *- unterstützt durch das Zeitargument -*
>
> *auf Routineaufgaben (die natürlich auch notwendig sind!).*

Das „Zeitargument“ als bremsende Größe und als ein nicht zu unterschätzender Druck im Mathematikunterricht hindert und verzögert häufig den Aufbau der geforderten mathematischen Kompetenzen.

2.6 Zusammenfassung

Sowohl die Problem-Solving- als auch die Problem-Posing-Methode haben gemeinsame Strategien, sowohl zum Lösen als auch zum Generieren von Mathematikaufgaben (vgl. untere Abb.).

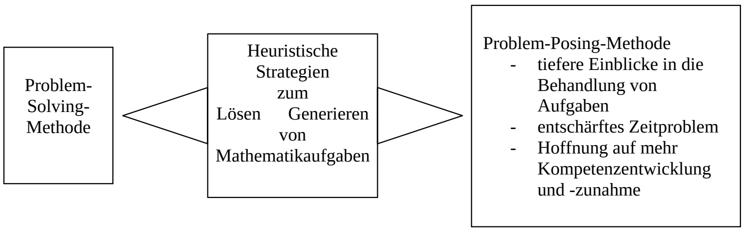


Abbildung 2.2

Der Vorteil der Problem-Posing-Methode liegt in der Möglichkeit, durch die schülerseitigen Veränderungen von Mathematikaufgaben einen tieferen Einblick in die Entwicklung von Kompetenzen bekommen zu können. Dabei ist das Zeitproblem ein wesentlich geringer hemmender Faktor, da die Schülerinnen und Schüler bekannte Aufgaben verändern und lösen. Die dadurch entstehenden Übungsmöglichkeiten geben Anlass zur Hoffnung, dass mathematische Kompetenzen effizienter ausgebildet werden können.

Kapitel 3

Die Variation von Mathematikaufgaben

3.1 Allgemeine Bemerkungen

3.1.1 Zum Variationsbegriff

Der Variationsbegriff spaltet sich laut *„Der große Knaur“* [31] auf in unterschiedliche Betrachtungen und kann auch vom mathematischen Blickpunkt aus gesehen allgemein als *„Veränderung, Abweichung, Abwandlung“* definiert werden.

Hauptinhalte des mathematischen Variationsbegriffs sind die Kombinatorik, Analysis und Algebra.

Neben Leonard Euler sei hier exemplarisch Leibnitz [28] genannt. Er verwandte *„combinatio“* als gewissermaßen umgangssprachlichen Sammelbegriff von *„Kombination, Permutation und Variation“*. In seiner Schrift (ebd.) spricht er von *„variationes“* und betont, dass

> *wir in der Regel die Verschiedenheit der Ordnung uns vorstellen, wenn wir von Variationen schlechthin sprechen; z. B. können 4 Dinge auf 24 Arten ersetzt werden.*

Hatte nun der Variationsbegriff einen frühen Anfang gefunden, so entwickelte sich im Laufe der letzten zwei Jahrzehnte eine Vielzahl von begrifflichen Anwendungen und Beschreibungen in der Mathematikdidaktik und -methodik.

Als ein Beispiel aus der Fülle der Veranschaulichungen innerhalb der mathematischen Literatur der letzten Jahre seien nur die Variationen mit Computersoftware genannt.

Natürlich bietet die moderne Computersoftware im Mathematik- und Informatikunterricht den Vorteil einer sofortigen Überprüfung und Visualisierung vorgenommener Variationen. Nachfolgend sind dazu drei Beispiele aus dem englischen Sprachbereich aufgeführt:

- *„Teaching variation using the web“* [13]
- *„Individualizing Mathematics Drill and Practice: Variations on a Computer Program“* [61]
- *„Putting the variation into chance and data“* [58]

Fast übereinstimmend wird der Variationsbegriff benutzt für die Veränderungen von gegebenen oder bekannten Inhalten.

3.1.2 Die Öffnen-durch-Weglassen-Methode als Alternative zu Aufgabenvariationen

Aufgabenvariationen sind eine Möglichkeit, den Mathematikunterricht offener zu gestalten, wobei „offen“ im Sinne von schülernah, selbstverantwortlich und kreativ verstanden wird. Unter dem Aspekt der Reaktionen auf die TIMS- und PISA-Veröffentlichungen wurden bereits im Kapitel 1.5.5 die Ergebnisse einiger Evaluationsstudien als Alternativen zu Aufgabenvariationen genannt.

An dieser Stelle soll noch auf die Techniken einer Alternative hingewiesen werden, Mathematik für Schüler erschließbarer zu gestalten: Die Methode des „Öffnens durch Weglassen“. Diese Methode verfolgt das Ziel, durch das Weglassen bestimmter Aufgabeninformationen, neue Aufgabentypen zu erhalten [7]:

> *Allgemein wollen wir unter einer offenen Aufgabe [durch Weglassen] eine geistige Anforderung an ein Individuum verstehen, die von der folgenden Art ist [...]: Ein gewisser Anfangszustand A ist mit Hilfe einer gewissen Transformation T in einen angestrebten Zielzustand Z zu überführen [...], wobei mindestens eine der drei Komponenten für das Individuum unklar oder mehrdeutig ist. Je nachdem, was unklar ist, erhält man verschiedene Typen offener Aufgaben [...].*

Nachteilig im Sinne der vorliegenden Untersuchung ist bei der „Öffnen-durch-Weglassen-Methode“ der Wegfall einer quantitativen Erfassung der Ergebnisse. Aufgabenvariationen hingegen bieten den Vorteil (vgl. Kap. 3.3) einer qualitativen und quantitativen Überprüfung von Schülerleistungen.

3.2 Aufgabenvariationen nach Schupp

Variationen im Sinne von Veränderungen und Abwandlungen bieten ein großes Ereignisfeld mathematischen Arbeitens. So sind die Intentionen auch vielfältig, denen das Öffnen von Mathematikunterricht mit Hilfe von Aufgabenvariationen unterliegen (vgl. die Ergebnisse dazu in Kap. 6.8.1). Exemplarisch seien hier auf Variationen der Koeffizienten eines Polynoms oder die geometrischen Eigenschaften von Flächen und Körpern hingewiesen. Verändert man einzelne Merkmale, so hat das zu beobachtende Folgen ...

Noch interessanter ist aber, die Folgen wahrzunehmen, denen die Schüler unterliegen. Über die dabei zu beobachtenden Auswirkungen wird ab Kap. 6 berichtet. Daher folgt nun die Untersuchung der Frage: Welche (positiven) Effekte können beobachtet werden, wenn Schüler Aufgaben verändern?

Eine grundlegende Voraussetzung, um die Frage zu beantworten, werden die

Variationen von Mathematik-Schulbuchaufgaben

sein.

Schupp [51] unterstützt in seinem Werk die Auffassung, dass

- *„deutsche Schülerinnen und Schüler [...] eine zu starke Ausrichtung an Standardaufgaben und -verfahren sowie mangelnden Umgang mit ungewohnten Fragestellungen oder gar wirklichen Problemen“ haben.*

Mit dieser Äußerung trifft Schupp genau in die Kritik der PISA-Untersuchung (vgl. Kap. 1.5.4). Dabei legt er aber im Weiteren einen gedanklichen Pfad nicht in Richtung neuer Schulbuchaufgaben, sondern (auch durch Vermehrung und Veränderung der eigentlichen Aufgaben durch neue Aufgabentypen), dass

- *„es im täglichen Leben nicht nur darauf ankommt, fremdbestimmte Probleme zu lösen, sondern auch und vielleicht noch mehr darauf, sie zu adaptieren, zu reduzieren, weiterzuentwickeln, in einen Sinnzusammenhang einzupassen, von dort her auf neue Fragen zu stoßen usw.“ (ebd.)*

Eigenständiges Handeln in Verbindung mit einem „Weiterentwickeln“ (s.o.) von Problemen sieht hier die Schupp´sche Theorie als eine Vorkehrung an, weil ansonsten außerdem

- *„die heuristische und bildnerische Funktion der Phase der Problemgenerierung bedroht“ ist. (ebd.)*

Schupp spricht hier ein wesentliches Merkmal der „Problemgenerierung“ (s.o.) bzw. der Aufgabenvariationen an. Er unterstellt diesen Unterrichtsphasen eine “heuristische und bildnerische Funktion“ (s.o.), lässt aber offen, welche Ausprägung diese haben könnten. Damit initiiert er die interessanten Fragen, denen in dieser Arbeit nachgegangen werden soll (vgl. Forschungsfragen am Ende des Kapitels).

Variationen von Schulbuchaufgaben wurden schon immer von einzelnen Mathematikern angedacht, angeregt und vorgenommen. Dabei ordneten allerdings die Autoren die Variationsergebnisse nur in unterschiedliche Begriffsfelder ein, die den Schupp´schen Kategorisierungen formal nahe kamen.

3.2.1 Variations-Kategorisierungen nach Steinhöfel / Reichold [55]

Die Autoren stellen hier einen schülerseitig vorgenommenen mathematischen Beweis dar. Dabei kommen sie zu Schlussfolgerungen über die Möglichkeiten und Variationen innerhalb der Beweisführung:

- *Verallgemeinerungen,*
- *Sonderfälle,*
- *Grenzfälle,*
- *Umkehrung (des bewiesenen Satzes),*
- *Beweisen analoger Sätze.*

Hier wie auch im anschließenden Beispiel erkennt man bereits die Unterschiede zur Schupp´schen Aufarbeitung von Variationen. Sowohl Steinhöfel/Reichold als auch Wittmann lassen eine präzise Analyse und Definition ihrer Kategorisierungen vermissen. Sie bleiben in ihren Darstellungen an der Oberfläche der Begriffsbeschreibung und unterlassen eine tiefergehende Analyse. Schupp verwendet aus diesem Grunde auch die Bezeichnung „Strategien“ (siehe Kap. 3.3) und impliziert damit die Notwendigkeit und Möglichkeit, Aufgabenvariationen als Tätigkeiten und gedanklichen Wege bemessen zu können.

3.2.2 Variations-Kategorisierungen nach Wittmann [68]

Lange vor den TIMS- und PISA-Studien und noch bevor Schupp Aufgabenvariationen zur Diskussion stellte, benennt Wittmann Mathematikaufgaben als „erzeugende Probleme“. Diese zeichnen sich aus als ein Ursprung für „verwandte Aufgaben“, die durch

- *Analogisierung,*
- *Abwandlung,*
- *Verallgemeinerung, usw.*

erarbeitet werden können. Zwar beschreibt Wittmann hier schon bezüglich der Rolle von Aufgaben beim Mathematiklernen ein Mehr an Dynamik – also eine Dynamik, die man bei „verwandten Aufgaben“ beobachten kann, belässt es aber bei seinen Betrachtungen auch nur bei Benennungen. Auch hier vermisst man eine Diskussion über die Rolle von Variationen, zumal ihre Bezeichnung als „erzeugende Probleme“ durchaus schon aussichtsreich ist.

Einen erfolgversprechenden Erkenntnisweg, zum Teil gebahnt durch die hier erörterten Beiträge von Steinhöfel/Reichold und Wittmann, nimmt Schupp mit seinen Betrachtungen über Aufgabenvariationen wesentlich effizienter auf. Vor ihm hatte keiner der Didaktiker diesen Weg so konsequent verfolgt.

3.3 Die Strategieliste nach Schupp

Schupp verbleibt nicht bei bloßen begrifflichen Kategorisierungen. Er wählt, wie bereits erwähnt, die Bezeichnung „Strategien“ und beschreibt [51] in seiner Auflistung dazu die wichtigsten *„Variationsstrategien“*. Innerhalb dieser Arbeit kommt diesen Strategien höchste Bedeutung zu. Sie

- korrelieren einerseits eng mit den in den Kapiteln 1 und 2 geforderten Kompetenzforderungen,
- andererseits dienen sie bei der Beschreibung der Aufgabenvariationen der Schüler als Instrument und definieren diese.

Es war für das weitere Vorgehen von Bedeutung, die Schupp´schen Erklärungen und Sichtweisen zu übernehmen.

Als *„Strategien“* bzw. *„Variationsstrategien“* (ebd. S.31) sind *„Standardmöglichkeiten“* zu erklären, die es *„zur Variation einer (gelösten) Aufgabe gibt“*. Mit der Bezeichnung (ebd. S.31) als *„heuristische Basisstrategien“* geht Schupp im Weiteren noch tiefer auf die qualitativen Unterscheidungsmöglichkeiten ein, die Strategien bieten. Darüber hinaus bieten die genannten qualitativen Aspekte noch zusätzliche Vorteile, die zur Übernahme des Schupp´schen Strategie-Konzepts führten.

Die vorliegende Untersuchung stellt dahingehend eine Weiterentwicklung des Strategiekonzeptes dar, denn es wurde auch die Möglichkeit einer quantitativen Erfassung der Variationsergebnisse aufgegriffen. Definierte Strategien können auch gemäß der Anzahl ihres Auftretens bzw. ihrer Anwendungen ausgezählt werden. Analysiert man also eine der schülerseitig angewandten Strategien, so hat das den Vorteil, anschließend die Kompetenzzunahme, um die es in dieser Arbeit u. a. geht, auch zahlenmäßig erfassen zu können. Diese Vorgehensweise definiert gleichsam die Strategieeinordnungen und ihr zahlenmäßiges Anwenden als ein qualitatives und quantitatives Messinstrument.

Die Strategieliste von Schupp (ebd. S.31-37) beinhaltet in ihrer Reihenfolge keine Wertigkeitssteigerung. Dies ist auch sinnvoll, da die einzelnen Strategien gemäß ihres Ausdrucks an mathematischer Kompetenz unterschiedlich zu bewerten sind. Auch gibt es einige wenige Variationen, die von unterschiedlichen Gesichtspunkten her verschieden eingeordnet werden können. Ein Beispiel dafür ist die „Frageverbessern - Strategie“ (vgl. 3.3.5). Entweder liegt bei der Analyse der Variation der Hauptgesichtspunkt auf einer neuen Fragestellung mit vielleicht neuen Aspekten für die Aufgabe oder auf Analogien innerhalb veränderter Schwierigkeitsgrade.

Die Strategien werden nachfolgend in ihrer Ausprägung und Anwendungsmöglichkeit beschrieben. Sie helfen so, die von den Schülern vorgenommenen Aufgabenvariationen einzuordnen.

3.3.1 Die Strategie-Kombinationen

„Kombinieren“ beschreibt Schupp auch mit „Vereinigen“ und bringt in treffender Weise zum Ausdruck :

> *Kombinieren ist eine wichtige Strategie in der Endphase des Variierens. [...] Man legt vorhandene Variationen zusammen [...]. Gewissermaßen [...] können dabei auch bisher disjunkte Unterrichtsthemen zusammenkommen, besteht also die Möglichkeit, zu kumulieren. Hier herrscht in unserem Unterricht eindeutig Nachholbedarf. (ebd. S.34)*

3.3.2 Die Trivial-Strategie

Diese Strategie, von Schupp mit „geringfügigem Ändern“ bezeichnet, wenden Schüler als eine Einstiegsstrategie in das Thema „Aufgabenvariationen“, egal in welcher Klassenstufe, vielfach zuerst an. Als Trivialität werden hierbei nur Größen, Koeffizienten oder Textbausteine verändert. Schupp verweist auf die Eignung dieser Strategie bei Computereinsätzen und *„im Zusammenhang mit Modellierungen“* (ebd. S.32).

3.3.3 Die Analogisieren-Strategie

Schupp erklärt das *„Analogisieren“* mit *„ersetzen bzw. ändern (von Bedingungen)“* und führt aus:

> *Diese Strategie hat vielfältige Erscheinungsformen. Sie kann richtige, aber auch falsche Aussagen erzeugen und ist darum besonders interessant. (ebd. S.32)*

Beispielsweise werden bei dieser Strategie im Sinne von *„Ersetzen“* Vorzeichen-, Exponenten- oder Rechenoperations-Änderungen durchgeführt. Es handelt sich hierbei also um eine Strategie, die anspruchsvollere Schülervariationen einordnet.

3.3.4 Die Verallgemeinern-Strategie

Gewiss war dieses Verfahren, auch „Weglassen von Bedingungen“ genannt, bei der Erkenntnisgewinnung von Mathematikern schon immer beliebt.

> *Es ist bekannt,* so Schupp *, dass es sich hierbei um eine der wichtigsten mathematischen Forschungsmethoden handelt. (ebd. S.32)*

Bei Schülern zeichnet es sich dadurch aus, dass man sich schnell in schwer- bis nichtbeweisbaren Sätzen wiederfindet: Koeffitienten werden durch Formvariablen ersetzt, natürliche und kleine Exponenten aus der Menge der natürlichen Zahlen ersetzt man allgemein durch ein „n“.

3.3.5 Die Frageverbessern-Strategie

Diese Variationsart korrespondiert eng mit den von Schupp (ebd., S. 33/35) bezeichneten Variationen

- *„Lücken beheben“*, worunter ausgelassene Unterrichtsinhalte verstanden werden können, die man z.B. aus zeichentechnischen Gründen vernachlässigt.

- *„Frage anschließen“*, wobei die Schüler kreativ die Aufgabe ausweiten.

Bei dieser Variation formulieren Schüler neue Fragen und verbessern damit durchaus den Sinngehalt der Aufgabe. Sie enthält dann durchaus Impulse, die über die bisherigen Rechen- oder Zeichenaufträge der Aufgabe hinausgehen.

3.3.6 Die Schwierigkeitsgrad-ändern-Strategie

Bei dieser Strategie verändern Schüler den Arbeitsauftrag der Aufgabe zum Schwierigeren hin.

Als Lehrer hat man durch seine Unterrichtserfahrung eher den vorschnellen Eindruck, dass Schüler lieber eine Aufgabe aus arbeitsökonomischen Gründen vereinfachen. Die Untersuchungen zeigten allerdings, dass wesentlich häufiger als erwartet Schüler beim Variieren den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe verändern, und zwar zum Schwierigeren hin. Natürlich wird diese Handlungsweise durch die Möglichkeit, den Taschenrechner oder Computer einzusetzen, begünstigt.

3.3.7 Die Umkehren-Strategie

Sätze oder Gleichungen bieten die Möglichkeit, Aussagen umzukehren.

3.3.8 Die Spezialisieren-Strategie

Wurden in der 4. Strategie Bedingungen weggelassen, so werden hier *„Bedingungen hinzugefügt“*. Schupp sagt auch hier, so wie es auch diese Arbeit widerspiegelt, dass *„diese Strategie leider kaum beachtet“* (ebd. S.33) wird.

3.3.9 Die Iterieren-Strategie

Hierbei setzen Schüler ihre meistens in der Brainstorming-Phase gemachten Variationen fort und erweitern die Aufgabe in verschiedene Richtungen. Es kann sich z. B. nach einer Oberflächenberechnungsaufgabe eine Volumenberechnung noch als weiterer Arbeitsauftrag anschließen. Zu einer reinen Rechenaufgabe kann als zweiter Aufgabenteil eine Zeichnung hinzukommen.

3.3.10 Die Blickrichtungänderungs-Strategie

Schüler gestalten hierbei eine Aufgabe um. Aus einer Textaufgabe formen sie eine Sachaufgabe und umgekehrt.

3.3.11 Die Visualisieren-Strategie

Bei dieser Strategie ergänzen die Schüler ihre Variationen mit Zeichnungen oder Skizzen. Sie versuchen dadurch, ihre Aufgabentexte zu verdeutlichen. Es sind nicht nur verspielte oder zeichenbegabte Schüler, die sowohl die Möglichkeit als auch die Notwendigkeit sehen, bei ihren Variationen Zeichnungen oder Skizzen (manchmal in druckreifer Fertigung) abzugeben.

3.3.12 Die Vergleichen-Strategie

Schupp bezeichnet diese Strategie als *„eine metakognitive Aktivität bei der Nachbewertung einzelner Variationsresultate“* (ebd. S.33).

Die im Kapitel 5.5 beschriebene Unterrichtsplanung zeigt auf, dass diese Strategie ein geplanter und damit gelenkter Bestandteil der Diskussions- bzw. Auswertungsphase ist. Damit springt die Vergleichen-Strategie aus dem Rahmen aller aufgezählten Strategien.

3.3.13 Überlegungen zur Strategieliste nach Schupp

In der bislang aufgeführten Liste, die grundlegend für den weiteren Verlauf der Forschungsarbeit ist, sind nicht alle von Schupp genannten Strategien vollständig aufgeführt. Es liegt nahe, auf die Strategien zu verzichten, die nicht oder kaum angewandt werden. Dabei nennt er u.a. „Daten ändern“, „Einen Umweltbezug herstellen“, . . .Ĩnnerhalb dieser Untersuchung treten diese Strategien aber nicht auf.

Eine weitere Überlegung bezieht sich auf die Strategie-Kombinationen (vgl. Kap. 3.3.1). Dabei ist es interessant zu beobachten, welche einzelnen Strategien innerhalb der Aufgabenvariationen mit welchen anderen Strategien verknüpft werden. Dass diese Form des Variierens eine Besonderheit darstellen, also mehrfache Strategieanwendungen innerhalb einer einzigen Aufgabe, darauf geht Schupp in seinen Ausführungen nicht vertieft genug ein. Er zählt diese Strategie in seiner Auflistung neben den anderen Strategien auf, obwohl sie ja keine einzelne Strategie darstellt, sondern aus mindestens zwei einzelnen Strategien zusammen aufgebaut ist.

Die daraus resultierenden Rückschlüsse zählen zu den wichtigen Informationen, wie man bei Schülerinnen und Schülern eine Kompetenzzunahme organisieren kann.

3.4 Zusammenfassung

Aufgabenvariationen liefern ein Messinstrument, mit dem sich die Veränderungen im mathematischen Handeln der Schüler qualitativ und quantitativ (prozentual) beschreiben lassen:

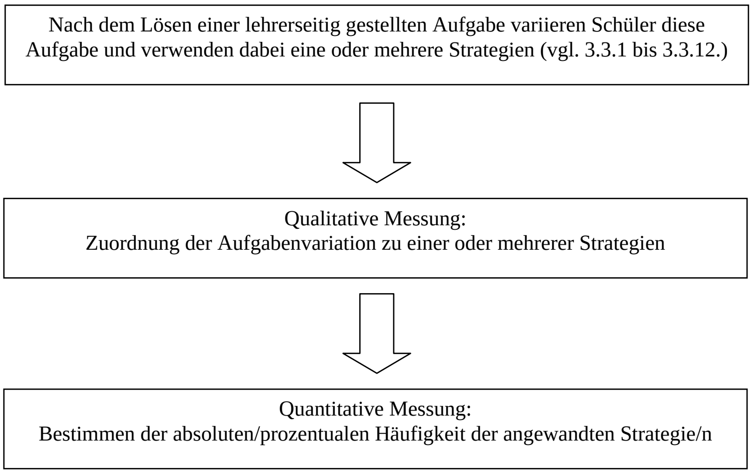


Abbildung 3.1

Mit Hilfe dieser Messprozesse können die für diese Untersuchung grundlegenden Fragen beantwortet werden (vgl. Kap. Überblick):

- Wie entwickeln sich die Variationen von Mathematikaufgaben im Laufe des 9. Schuljahres?
- Welche Kompetenzen nehmen in dieser Zeit bei allen Schülern zu?
- Wie gehen einzelne Schüler mit dem Variieren von Mathematikaufgaben um?
- Welche Kompetenzen (und damit welche angewandten Strategien) bleiben in der Folgezeit (10. Schuljahr) stabil?

Welche Kompetenzen sich in qualitativer und quantitativer Hinsicht im Vergleich zu den in den Kapiteln 1 und 2 geforderten entwickeln, werden die Ergebnisse der folgenden Untersuchungen zeigen. Der Autor vertritt die Auffassung, dass mathematische Konfigurationen, hier in der Ausprägung von Aufgabenvariationen, nicht ad hoc geschehen , sondern (über zwei Jahre Untersuchungszeit) formbar, beobachtbar und messbar sind.

Kapitel 4

Voruntersuchungen - Analysen der Bedingungen

Die Voruntersuchungen zur vorliegenden Längsschnittstudie stellen sowohl die personellen, also schülerseitigen, wie als auch die institutionellen Gegebenheiten hinsichtlich des Lernortes und des Unterrichtsstoffs dar. Hinzu kommen die didaktisch-methodischen Entscheidungen des Lehrenden in Verbindung mit den Lernzielen und den zu schreibenden Klassenarbeiten im Laufe eines Schuljahres. Über die ausgewählten Aufgaben, die den Schülerinnen und Schülern erst zur Lösung und dann zur Variation vorgelegt wurden, berichten die Kap. 6.1 und 8.

Mit Blick auf zu festigende und entwickelbare mathematischen Kompetenzen liegen diesem Kapitel die Beweggründe und Motive für die Unterrichtsplanung im Kap. 5 zugrunde.

4.1 Vorstellung der Probanden

Vor dem Beginn der Untersuchungen lagen einige begünstigte Faktoren hinsichtlich der Frage vor , in welcher Klasse eine über zwei Jahre andauernde Beobachtung (s.u.) durchgeführt werden sollte. Man achtet seitens der Schulleitung auf einen kontinuierlichen Unterricht innerhalb einer Klasse und damit verbunden auf möglichst wenig Lehrerwechsel. Ist der Mathematiklehrer dann auch noch Klassenlehrer, so ist es verständlich, dass die Entscheidung eindeutig auf die eigene Klasse fällt.

4.1.1 Bedingungsanalyse der Klasse

Allgemein ist es einem Klassenlehrer am ehesten möglich, die Vorteile einer ihm zugeordneten Lerngruppe zu erleben. Darunter fallen ein Mehr im Hinblick auf Motivation, Disziplin und individuelle Kenntnisse der einzelnen Schüler. Diese Vorteile machten sich in der sechsjährigen gemeinsamen Unterrichtszeit und der zweijährigen Untersuchungs- und Beobachtungszeit auf diese Weise bemerkbar.

Die für die Untersuchung herangezogene Klasse mit 14 Mädchen und 15 Jungen wurde im Schuljahr 1996/97 in die Gesamtschule Duisburg-Mitte, Abteilung Pappenstraße, eingeschult. Gesamtschultypisch wurden am Ende der Orientierungsstufe, also am Ende der Klasse 6, die Differenzierungen in den Fächern Englisch und Mathematik vorgenommen. Jeder Schüler der Klasse wurde dabei einem G-Kurs (Grundkurs) oder einem E-Kurs (Erweiterungskurs) zugeordnet. Das Differenzierungsverhältnis in dieser Klasse im Fach Mathematik lautete durch einen Zuzug zu Beginn des 7. Schuljahres:

$$\text{Anzahl E-Kurs-Schüler} : \text{G-Kurs-Schüler} = 18 : 12.$$

Im Fach Mathematik lag die notenabhängige Differenzierungsgrenze, um in einen E-Kurs zu kommen, bei der Note 3- (befriedigend minus). Der ab Klasse 7 neugebildete E-Kurs Mathematik aus der Klasse 7c wurde durch weitere 9 E-Kurs-Schüler der Klasse 7a aufgefüllt, so dass der Kurs ab dem Schuljahr 1998/99 14 Mädchen und 13 Jungen umfasste.

Im Laufe der Zeit vom 7. bis zum 10. Schuljahr konnten zwei Schüler vom G-Kurs in diesen E-Kurs aufgestuft werden. Zwei Schüler mussten hingegen wegen anhaltend schlechten Leistungen in den G-Kurs abgestuft werden. Drei Schüler wechselten während des 9. und 10. Schuljahres als Seiteneinsteiger von Duisburger Gymnasien in die Gesamtschule und wurden in diesen E-Kurs Mathematik integriert. Am Ende des 10. Schuljahres im Juni 2002 gingen aus diesem Kurs 9 Schüler in die gymnasiale Oberstufe dieser Gesamtschule. Die anderen Schüler begannen eine Berufsausbildung oder wechselten zu einem Berufskolleg.

Es war eine heterogene Lerngruppe mit Schülern, die eins der beiden Schulabschlussziele, FOR (Fachoberschulreife) oder FOR/Q (Fachoberschulreife mit Qualifikation für die gymnasiale Oberstufe), anstrebten. Die Notenübersicht am Ende eines jeden Schulhalbjahres zeigt folgende Verteilung:

4.1.2 Fokussierung auf vier Schülerinnen und Schüler

Bei den weiteren Untersuchungen wurden besonders die Leistungen von zwei Schülerinnen und zwei Schüler untersucht: Anna, Natascha, Enrico und Mir-

Schul-halbjahr	Anzahl der Schüler	sehr gut	gut	befriedi-gend	aus-reichend	mangel-haft	unge-nügend	Noten-durch-schnitt
7.1	27	1	5	14	5	2	0	3,1
7.2	30	1	10	11	8	0	0	2,9
8.1	29	3	11	10	5	0	0	2,6
8.2	29	3	5	9	7	5	0	3,2
9.1	31	1	4	15	8	3	0	3,3
9.2	31	3	6	7	13	2	0	3,2
10.1	30	2	12	9	6	1	0	2,7
10.2	31	4	13	9	5	0	0	2,5

Tabelle 4.1

co. Sie waren in der Erledigung ihrer Hausaufgaben verlässlich und wiesen, was für die Untersuchung wichtig war, unterschiedliche Mathematiknoten auf.

Abb. 9 zeigt die Entwicklungen ihrer Mathematiknoten im Laufe der vier Unterrichtsjahre im E-Kurs Mathematik:

Schulhalbjahr	Anna	Natascha	Enrico	Mirco
7.1	3−		3	war im 1. Halbjahr noch im Grundkurs
7.2	2		3+	3
8.1	1−		2−	3−
8.2	1	kam in 9.1 als Seiteneinsteigerin von einem Gymnasium	3	5
9.1	2+	3	3	4−
9.2	1−	2	3	4
10.1	1−	2−	3+	4−
10.2	1−	2−	3+	4

Tabelle 4.2

4.2 Die Lernausgangslage bis zur 8. Klasse

Die Schüler im Bundesland NRW verlassen nach dem 4. Schuljahr die Grundschule und kennen die Grundrechenarten. In der Orientierungsstufe wird dieses Wissen neu aktualisiert, nach Möglichkeit bei den Schülern auf einen Gleichstand gebracht und durch das Größenumrechnen ergänzt. Die Bruch- und Dezimalrechnung erweitert den Zahlenbereich um die positiven rationalen Zahlen, die in der 7. Klasse um die negativen ergänzt werden. Weiter sind in Klasse 7 die bürgerlichen Rechenarten in den proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen, dem direkten und indirekten Dreisatz sowie das Prozentrechnen vertreten. Curricular vorgesehen sind für den Jahrgang 8 Algebra, das Lösen von linearen Gleichungen und der Funktionsbegriff, der mit den linearen Funktionen eingeübt wird.

Die algebraischen Stoffgebiete werden im Laufe der 5. bis 8. Klassen immer wieder durch geometrische Themen ergänzt. Geometrische Grundbegriffe, Flächen und Rauminhaltsberechnungen werden neben den Kongruenzabbildungen in der Erprobungsstufe eingeübt . Die Dreiecks- und Viereckskonstruktionen des 7. Schuljahres gehen im 8. Schuljahr über in die Kongruenzsätze und in die Lehre der Vierecksfamilie.

Die „Themenfelder Daten“ (Richtlinien S. 48/58) und „Zufall“ (ebd. S.54/64) ergänzen in der 6. Klasse mit den Begriffen „Häufigkeit“ und „Wahrscheinlichkeit“ und in der 8. Klasse mit der „beschreibenden Statistik“ den Unterrichtsplan.

4.3 Die Richtlinien und Lehrpläne für die Klassen 9 und 10

Der Mathematikunterricht im 9. Jahrgang des Schuljahres 2000/2001 hatte offiziell noch die Richtlinien des Erscheinungsjahres 1980 als Grundlage; der Unterricht in der 10. Klasse im Schuljahr 2001/2002 orientierte sich an den damals neuen Richtlinien von 1998 , die zwar erst ab dem 1. August 2001 verbindlich in Kraft traten, doch schon in dem Jahr zuvor in den Unterricht einbezogen wurde (siehe Kap. 1.4.3 und Kap. 5).

Die Richtlinien [33] von 1998 unterteilten den Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe 9 und 10 in verschiedene Themenfelder, nämlich:

- *Daten und Zufall*
- *Körper und Flächen*
- *Vergleichen und Messen*
- *Beziehungen im Raum*
- *Gesellschaft und Wirtschaft*
- *Kreise und Kreiskörper*
- *Zuordnungen und Modelle*
- *Wachstum*
- *Mathematische Reise*
- *Mathematische Grundfertigkeiten*
- *Rechnen mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen*
- *Die Satzgruppe des Pythagoras*
- *Untersuchung quadratischer Funktionen*
- *Trigonometrie und trigonometrische Funktionen*

Den genannten Themenfeldern ordneten die Richtlinien im weiteren mathematische Inhalte (ebd.) zu

- *Arithmetik*
- *Stochastik*
- *Algebra/Funktionen*
- *Geometrie*
- *Hilfsmittel*

..., deren Verknüpfungen mit den Themenfeldern noch weiter ausgeführt wurden.

Die aktuell geltenden Mathematikrichtlinien für Gesamtschulen des Landes Nordrhein-Westfalen erschienen mit Stand vom 3. Oktober 2003 als „Kernlehrplan" in einer Entwurfsfassung. Diese Vorgabe galt nicht für die in dieser Arbeit dokumentierten Untersuchungen, da diese zeitlich früher waren.

Die in diesen neuen Richtlinien gegebenen offenen gestalterischen Möglichkeiten eines Mathematikunterrichts wurden in dieser Arbeit teilweise vorweggenommen. Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchungen geben den in den Richtlinien vorgestellten Realisierungsmöglichkeiten Recht. In den Schuljahren 2000/2001 und 2001/2002 wurden diese Unterrichtsalternativen der Freiheit des Klassen- und Mathematiklehrers einfach entnommen.

4.4 Die Lehrbücher zum Mathematikunterricht der 9. und 10. Jahrgangsstufen

Als Schul-Mathematikbücher war an der Gesamtschule Duisburg-Mitte ab dem Schuljahr 1990/1991 von der Schulkonferenz das Unterrichtswerk

Mathematik Gesamtschule, Verlag Westermann, Braunschweig, 1990

eingeführt worden.

Für die Orientierungsstufe der Klassen 5 und 6 gab es die entsprechenden Bände. Über einheitliche Ausgaben verfügte man auch in den differenzierten Mathematik E- und G-Kursen der Klassen 7 und 8. Ab dem 9. Jahrgang gab es dann verschiedene Ausgaben, die den unterschiedlichen Unterrichtsniveaus Rechnung trugen. Innerhalb dieser Arbeit dienten als Mathematikbücher die Ausgaben

Mathematik 9 Erweiterungskurs und
Mathematik 10 Erweiterungskurs

der genannten Unterrichtsreihe.

4.5 Der schulinterne Lehrplan

Der schulinterne Lehrplan orientierte sich am Inhalt dieser Lehrwerke:

Klasse 9, E-Kurs:

Wiederholungen als tägliche Übungen für Berufseinstellungstests, Quadrieren, Quadratwurzeln, reelle Zahlen, die Satzgruppe des Pythagoras, Anwendungsaufgaben zum Satz des Pythagoras, quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen, Textaufgaben zu quadratischen Gleichungen, Kreis und Kreisteile, Zylinder, Pyramide, Kegel, zusammengesetzte Körper, lineare Gleichungssysteme mit zwei/drei Variablen, Textaufgaben zu Gleichungssystemen, Ähnlichkeitsabbildungen.

Klasse 10, E-Kurs:

Wiederholungen als tägliche Übungen für Berufseinstellungstests, Potenzrechnung, Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, die Kugel, Oberfläche und Volumen vom Pyramiden- und Kegelstumpf, trigonometrische Berechnungen am rechtwinkligen und allgemeinen Dreieck, trigonometrische Anwendungsaufgaben, trigonometrische Funktionen, Bruchgleichungen (aus dem Mathematikbuch der 8. Klasse), Wurzelgleichungen, Wahrscheinlichkeitsrechnung

4.6 Sachanalytische Betrachtungen des Unterrichtsstoffs

Der Unterrichtsstoff der Klassen 9 und 10 beinhaltet eine Fülle von weiteren mathematischen Erkenntnissen. Dazu zählen z. B. die Erweiterung des Zahlbereichs über die rationalen Zahlen hin zu den reellen Zahlen, Berechnungen am rechtwinkligen und allgemeinen Dreieck, den Begriff der Näherung in der Intervallschachtelung bei Wurzeln und bei der Zahl Pi als eine arithmetische und geometrische Methode.

Hinzu kommen die von der Mathematik-Fachkonferenz festgelegten täglichen Übungen für Berufseinstellungstests. Sie beinhalteten Wiederholungsthemen vornehmlich aus den Klassen 5 bis 7 mit einer einplanbaren Unterrichtszeit von ca. 10 Minuten pro Tag: Dazu zählen z. B. die vier Grundrechenarten, die Bruch- und Dezimalrechnung, der direkte und indirekte Dreisatz.

In den Mathematikrichtlinien von 1998 (siehe Kap. 4.2) wird bezüglich der Kontexte der Hinweis gemacht (ebd., S.28):

> *Die Beschreibung der Themenfelder in den Hinweisen für die Arbeit in den Jahrgangsstufen enthalten die Spalte mit dem Titel „Sinn, Bedeutung, zentrale Ideen“. Dort wird ein größerer Zusammenhang beschrieben, in dem das Themenfeld steht und der das Lernen von Mathematik sinnvoll macht.*

Diese Spalte „Sinn, Bedeutung, zentrale Ideen“ (ebd., S.70-82) beschreibt nun zu jedem Themenfeld eine sachanalytische Einbettung. Exemplarisch folgt hier nur für das Themenfeld „Untersuchung quadratischer Funktionen“, vorgesehen nur für Erweiterungskurse, die curriculare Analyse des Unterrichtsstoffs (vgl. Anhang 5):

> *Schon sehr frühzeitig haben sich Mathematiker auf die Suche nach Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen begeben. Bei physikalischen Modellierungen z. B. Fallgesetze wurden dann quadratische Funktionen auch außermathematisch bedeutsam. In der Untersuchung der Parabel als Graph einer quadratischen Funktion verbinden sich geometrische und algebraische Fragestellungen.*

Auch ist an dieser Stelle dem sachanalytischen Inhalt der Richtlinien zu entnehmen , dass mit der Erwähnung „außermathematisch“ neben der Rechenkompetenz auch eine Anwendungskompetenz eingefordert wird. Entsprechende Hinweise finden sich auch in den anderen Erläuterungen der Themenfelder, z. B im Themenfeld „Trigonometrie und trigonometrische Funktionen“ (ebd. S.82):

> *..., die vielfältige praktische Anwendung - etwa bei Geländevermessungen ...*

Ansprüche dieser Art, insbesondere die „außermathematischen“ Forderungen (s.o.), unterstrichen die Fragestellungen (siehe Überblick) in den Untersuchungen dieser Arbeit. Es bestand eine Notwendigkeit und sie besteht bis heute, die Richtlinienvorgaben und damit die Kompetenzerwartungen zu erfüllen. Ein gangbarer Weg sollte mit den Aufgabenvariationen beschritten werden. In ihnen wurden Anwendungen und Modellierungen von Aufgaben schülerseitig eingesetzt.

4.7 Didaktische Überlegungen

Didaktische Entscheidungen sind im Gesamtzusammenhang des pädagogischen Arbeitens von herausragender Bedeutung. Die in dieser Arbeit dokumentierte zweijährige Forschungszeit macht daher im Rahmen der „didaktischen Überlegungen“ eine Erläuterung der Entscheidungsdarstellungen notwendig. Im Sinne der Aufgabenvariationen werden ja einzelnen Aufgaben bearbeitet und ihre Variationsweise anschließend in den Fokus der Betrachtungen gezogen. Die Auswahl dieser in der Schule zu bearbeitenden Mathematikaufgaben folgte damals immer vergleichbaren didaktischen Entscheidungskriterien. Daher soll im Folgenden eine Skizzierung der allgemeinen didaktischen Überlegungen und Schwerpunktsetzungen folgen, die diesen beiden Unterrichtsjahren in der 9. und 10. Klasse vorausgingen.

Das während der Untersuchungszeit geltende Curriculum gab Erläuterungen zu den „Didaktischen Schwerpunkten" (ebd., S.29):

> *Der Erwerb mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten ist ein langfristiger Prozess, in dem die Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnisse kontinuierlich erweitern, anwenden und miteinander verknüpfen. Mathematische Begriffe, Regeln, Operationen, Verfahren und Anwendungen stützen sich auf Abstraktionen, die jede Schülerin und jeder Schüler selbst vollziehen muss. Das Lernen von Mathematik wird begünstigt, wenn solche Abstraktionsprozesse kontinuierlich erfolgen und sich über einen längeren Zeitraum erstrecken. [...]*

Das hier erwähnte „Stützen auf Abstraktionen" (s. o.) soll durch den geplanten Einsatz von Aufgabenvariationen realisiert werden. Die Schülerinnen und Schüler haben Gelegenheit, mathematische Vorstellungen und bereits Gelerntes in der Form unterschiedlicher Strategieanwendungen innerhalb ihrer „Abstraktionsprozesse" (s. o.) durchzuführen. Andererseits werden durch diesen Unterrichtsstil auch neuen Inspirationen Wege geöffnet.

Genannte didaktische Schwerpunkte stehen allerdings in Wechselwirkung mit anderen Entscheidungskriterien, nach denen Unterricht geplant werden muss:

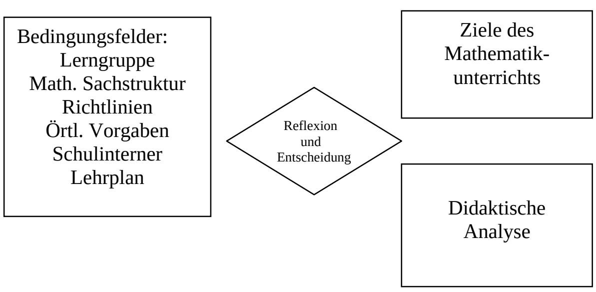


Abbildung 4.1

Eine konkrete Orientierungs- bzw. Planungshilfe gibt Winter [67] für die Auswahl mathematischer Lehrinhalte:

1. *Inwieweit ist der Stoff geeignet, die spezifische mathematische Denkweise angesichts der vorliegenden Dispositionen der Schüler zu repräsentieren?*
2. *Inwieweit ist der Stoff geeignet, möglichst vielen der allgemeinen Lernziele gerecht zu werden?*
3. *Inwieweit ist der Stoff speziell bedeutsam für die Anwendbarkeit im Sinne einer allgemeinen Berufsvorbereitung?*
4. *In welcher Weise wirkt sich die Hereinnahme des Stoffs auf den Gesamtinhalt aus?*
5. *Inwieweit berührt der Stoff Inhalte anderer Schuldisziplinen?*
6. *Inwieweit weisen der Stoff und die an ihm zu entfaltenden Tätigkeiten über sich selbst hinaus?*
7. *Inwieweit erfüllt der Stoff die seitens der „Abnehmer" gehegten Erwartungen?*

Winter gibt in seinen Fragestellungen keine nähere Erläuterung, was er unter den „vorliegenden Dispositionen der Schüler" (s.o.) genau versteht. Verfolgt man aber den Aufforderungscharakter seiner Impulse, didaktische Entscheidungen zu treffen, so fällt insbesondere seine 6. Frage auf. Er postuliert die Möglichkeit, am Unterrichtsstoff eine „zu entfaltende Tätigkeit" (s.o.) ausüben zu können. An dieser Stelle decken sich seine Forderungen mit den Absichten dieser Untersuchungsreihe.

Klafki [24] weist auf Interdependenzen hin , setzt aber Prioritäten bei den Grundfragen zur didaktischen Analyse:

1. *Welchen größeren bzw. welchen allgemeinen Sinn- oder Sachzusammenhang vertritt oder erschließt dieser Inhalt? [...]*
2. *Welche Bedeutung hat der betreffende Inhalt bzw. die an diesem Thema zu gewinnende Erfahrung, Erkenntnis, Fähigkeit oder Fertigkeit bereits im geistigen Leben der Kinder meiner Klasse, welche Bedeutung sollte er - vom pädagogischen Gesichtspunkt aus gesehen - darin haben?*
3. *Worin liegt die Bedeutung des Themas für die Zukunft der Kinder?*
4. *Welches ist die Struktur des Inhalts? [...]*
5. *Welches sind die besonderen Fälle, Phänomene, Situationen, Versuche, Personen, Ereignisse, Formelemente, in oder an denen die Struktur des jeweiligen Inhalts den Kindern dieser Bildungsstufe, dieser Klasse, interessant, fragwürdig, zugänglich, begreiflich, anschaulich werden kann? [...]*

Die Intentionen der zwei exemplarisch zitierten Autoren zur Erstellung der didaktischen Analysen während der beiden Unterrichtsjahre beinhalten auch die Möglichkeit, andere Wege als die im Lehrbuch aufgezeigten zu gehen. Davon wurde auch in den didaktischen Überlegungen zur Gestaltung des Unterrichts dieser Klassenstufen Gebrauch gemacht: Zum einen im Unterrichtsstil der Aufgabenvariationen insgesamt, zum andern mit Arbeitsblättern, von denen eines mit Aufgaben zum Thema „zusammengesetzte Körper" (vgl. Kap. 6.1/Anlagen) eine Grundlage für Variationen bildete. Unter der Überschrift „Lernsituationen mit Handlungsmöglichkeiten" erfährt der Lehrer auch in den Richtlinien [33] Entscheidungshilfen für seinen Unterricht. Beispielhaft sei dazu eine Erläuterung aus dem „Themenfeld: Körper und Flächen" zitiert (ebd., S.71):

> *Unterschiedliche Werkstücke auswählen, diese unter mathematischen Gesichtspunkten beschreiben, [...]*

In diesem Sinn werden in den Richtlinien didaktische und auch damit verbundene methodische Gesichtspunkte für jedes Themenfeld gesondert aufgearbeitet und dem Lehrer zur unterrichtlichen Übernahme vorgeschlagen. Die Variationen von Mathematikaufgaben innerhalb dieser Unterrichtsreihe sollen von den Schülerinnen und Schüler als „unterschiedliche Werkstücke" (s.o.) erfahren werden. In diesem Sinne erfahren die Richtlinien eine gesonderte Interpretation durch den in dieser Arbeit angewandten Unterrichtsstil.

4.8 Die methodische Analyse

Die vier Unterrichtsjahre des fünften bis achten Schuljahres (von 1996 bis 2000) zeigten, dass die Schüler einen hohen Grad an Eigeninteresse mit in den Mathematikunterricht brachten. Es bestand also für die Schuljahre 9 und 10 die Aufgabe, diese Tendenz wie auch den natürlichen Entdeckungsdrang der Schüler weiter zu fördern. Eine Möglichkeit der Verwirklichung bestand darin, die Schüler durch eine geeignete Motivation zu einem Problem bzw. einer Frage hinzuführen, entlang dem bzw. derer sie sich einer Lösung von selbst nähern konnten. Mit dieser methodischen Strategie wurden in der Klasse 9 und 10 im Wesentlichen die Schülereigenschaften unterstützt.

Die positiven Bedingungen der Schüler und des Umfeldes sowie die Thematik des mathematischen Stoffs der beiden letzten Jahre der Sekundarstufe I eröffneten ein Unterrichtsfeld, das einer Bewältigung in Form des Problemlöseverfahrens am nächsten kam. Die Methodenkonzeption dieser Unterrichtsjahre beinhaltete daher weniger eine rezeptive oder reproduktiver Lernweise als mehr eine applikative und produktive und kam mit den Forderungen der damals geltenden Richtlinien überein (ebd., S. 32):

> *Mathematik lernen ist erfolgreich, wenn die Schülerinnen und Schüler als Gestalter ihrer eigenen Lernprozesse ernst genommen werden. Je mehr es gelingt, sie zu selbständigem Lernen zu bringen und je mehr Verantwortung sie für ihre Lernergebnisse übernehmen, desto näher kommt der Mathematikunterricht der Verwirklichung seiner Ziele. Die methodische Gestaltung des Mathematikunterrichts zielt darauf, die Eigenaktivität der Schülerinnen und Schüler anzuregen, Verstehen zu ermöglichen, [...]*

Wenn hier die Richtlinien Schwerpunkte auf „Gestalter sein“ und „Eigenaktivität“ legen (s.o.), so bilden die Aufgabenvariationen ein Feld des Mathematiktreibens für jede Schülerin und jeden Schüler. „Verantwortung übernehmen ldots für ihre Lernprozesse“ (s.o.) können Aufgabenvariationen auch in einem kleineren Rahmen ermöglichen. Hier ist der Aspekt der gemeinsamen Reflexion (vgl. Kap.5.6) der Variationsergebnisse bzw. der Strategieanwendungen zu nennen.

Der methodischen Analyse kommen noch die anschließenden Hinweise entgegen (ebd., S.32,37):

> *Verständnisvolles Lernen ereignet sich, wenn Schülerinnen und Schüler Begriffe und Begriffsstrukturen für sich selbst aufbauen.*
> *- und:*
> *Mit der Selbststeuerung erwerben Schülerinnen und Schüler eine Kompetenz, die sie zunehmend in die Lage versetzt, ihr Lernen zu evaluieren [...]*

Das „Selbstaufbauen von Begriffsstrukturen“ (s.o.), so ist es den späteren Erfahrungen zu entnehmen, bedurfte innerhalb der Aufgabenvariationen immer wieder einer Korrektur. Lag nach einer Variation eine unlösbare Aufgabe vor, so war das Klassengespräch das eigentliche Korrektiv für die angewandte Strategie. Eine „Selbststeuerung“, um „ihr Lernen zu evaluieren“ (s.o.), entwickelte sich in dem Sinn, als dass die Schüler Definitionen bzw. Einordnungen ihrer angewandten Strategien im Laufe der Zeit auch selbst vornahmen. In diese Überlegungen floß in die Auswahl der zur Lösung und Variation bestimmten Aufgaben ein. Es wurden dazu geometrische, zeichnerische und algebraische Problemstellungen ausgesucht, die aber auch ihrerseits z.T. offene, z.T. eher geschlossenen Arbeitsaufträge enthielten. (vgl. Kap. 6.1 und 8). Dieses Aufgabenspektrum deckte damit eine große Untersuchungsmöglichkeit der Forschungsfragen der vorliegenden Arbeit ab, stellte aber auch die typischen Mathematikaufgaben vor, die ein Lehrer in den Klassen 9 und 10 behandelt.

4.9 Der Medieneinsatz

Die traditionellen und in der Schule immer zur Verfügung stehenden Medien, wie

- Schultafel und farbige Kreide,
- Tafel- und Schüler-Zeichengeräte,
- Lehr-, Kurs- und Jahrbücher,
- Körper- und Flächenmodelle sowie
- Kartenständer mit Kordeln zur Darstellung von rechten Winkeln im dreidimensionalen Raum und derartige Dinge mehr

wurden in den letzten Jahren durch den Taschenrechner und, wo verfügbar, durch den Computer ergänzt. Die Mathematik-Fachkonferenzen der jeweiligen Schulen legen im Allgemeinen fest, ab welchem Schuljahr der Taschenrechner als elektronisches Hilfsmittel eingesetzt werden soll. Dabei wird berücksichtigt, dass die Schüler erst dann mit dem Taschenrechner rechnen sollten, wenn sie die wichtigsten Rechnungen auch ohne ihn - möglichst fehlerfrei - erledigen können. In Zusammenhang mit der Kreiszahl Pi und der Zahlbereichserweiterung auf die reellen Zahlen ist es meistens das 9. Schuljahr, in dem der Taschenrechnergebrauch eingeführt und, auch in Klassenarbeiten, zugelassen wird. Die in den Richtlinien intendierten weiteren „didaktischen Möglichkeiten“ beim Taschenrechnergebrauch gibt folgender Hinweis wieder (ebd., S. 38):

> *Die Nutzung von Taschenrechner und Computer eröffnet die Möglichkeit, Problemlösungen (Analyse einer Aufgabenstellung, Entwicklung eines Algorithmus, einer „Handlungsanleitung“ zur Ermittlung einer Lösung) als eigenständige, kreative gedankliche Leistung zu betrachten [...].*

Die Ergebnisse der Untersuchungen trafen genau auf diesen Umstand des Taschenrechnergebrauchs zu. Die „eigenständigen, kreativen gedanklichen Leistungen“ (s.o.) der Schülerinnen und Schüler führten zu Aufgabenvariationen, die auch Aufgaben bedingt durch den Taschenrechnergebrauch z.B. unlösbar machten (vgl. Kap.6).

4.10 Die Lernziele

Schon in den 1998 erschienenen Richtlinien für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I der Gesamtschulen in NRW wurde der in der Schulpraxis nicht immer beobachtete (eigene Erfahrungen an der Schule) Modellierungsbegriff thematisiert (ebd., S. 25):

> *Die Schülerinnen und Schüler erfahren, wie Mathematik zur Deutung und Modellierung, zum besseren Verständnis und zur Beherrschung nichtmathematischer Phänomene herangezogen werden kann.*

Die anschließenden Erklärungen weisen schon sehr wohl auf die in der PISA-Studie Jahre später erfolgten außerunterrichtlichen Fragestellungen hin (ebd., S.25):

> *Wenn im Mathematikunterricht Anwendungen behandelt werden, sind nicht „vorgefertigte" Modelle das Entscheidende, sondern Gelegenheiten, in überschaubaren Situationen selbst mathematisch zu modellieren und darüber zu reflektieren.*

Wie eine Aufforderung, mit Hilfe von Aufgabenvariationen den „Zielsetzung des Mathematikunterrichts und angestrebte Qualifikationen" (ebd., S.24) näher zu kommen, wirken die folgenden Passagen der Lernzieldarstellungen gemäß den 1998-Richtlinien (ebd., S.25-26):

> *Die Schülerinnen und Schüler brauchen Zeit und Gelegenheit, den eigenen Verstand fragend, konstruierend und analysierend einzusetzen, um Mathematik zu durchschauen.*
> ...mit dem Hinweis, dass
> *ein Vernetzen von Kenntnissen die Chance für das Verstehen vergrößern.*

Es kann nach obigen Erläuterungen festgestellt werden, dass die Aufgabenvariationen durchaus richtlinienkonform eingesetzt wurden und, wie ihre Ergebnisse zeigen werden, die Erwartungen der „Zielsetzungen des Mathematikunterrichts" zum großen Teil erfüllten.

Von Interesse sind noch die Lernzielerwartungen der Richtlinien (ebd., S.24) im Hinblick auf die „individuelle Selbstentfaltung" der Schüler ...

> *Dazu gehören die Fähigkeit und Bereitschaft*
>
> - *grundlegende mathematische Ideen und Fertigkeiten auf alltägliche Probleme anzuwenden.*

- *zentrale Ideen zu erkennen, in denen sich Zusammenhänge zwischen Mathematik und außermathematischer Welt spiegeln.*
- *unter Rückgriff auf mathematische Begriffe zu argumentieren.*
- *den eigenen Verstand fragend, konstruierend und analysierend einzusetzen, um Mathematik und mathematische Anwendungen zu verstehen.*
- *eigene Ergebnisse und Ergebnisse anderer kritisch zu hinterfragen, Widersprüche zu erkennen, und ihnen auf den Grund zu gehen.*
- *Verantwortung für das eigene Lernen zu übernehmen und bewusst Lernstrategien einzusetzen.*

Besagte „Selbstentfaltung“ stellte Zielvorgaben auf der kognitiven, affektiven und psychomotorischen Ebene als Teillernziele auf. Ihre Diskussion im Vergleich mit den Ergebnissen der Aufgabenvariationen erfolgt in Kapitel 6.

Verfeinerte Lernziele zu den einzelnen Unterrichtskapiteln fassen die Richtlinien entlang der in den Themenfeldern der jeweiligen Schuljahre notierten „Anforderungen“ zusammen (siehe Anlage 5).

4.11 Die Klassenarbeiten

Im Laufe der zweijährigen Untersuchungen wurden auch Aufgabenvariationen in Klassenarbeiten erprobt und gewertet. Es wurden in jedem Schulhalbjahr der Klassen 9 und 10 jeweils 3 Klassenarbeiten geschrieben, die immer einen 2stündigen Zeitumfang hatten. Die Gestaltung der Klassenarbeiten folgte den Erklärungen der Richtlinien NRW Gesamtschule von 1998, wobei zwei Hinweise zum Erstellen der Arbeiten bemerkenswert sind (ebd., S.89):

- *Zusatzaufgaben [kann man] zum Verallgemeinern, zum Weiterdenken oder zum Knobeln anbieten.*
- *[Klassenarbeiten können] Aufgaben enthalten, deren Problemstellung von den Schülerinnen und Schülern erweitert werden und entsprechend gelöst werden kann.*

Genau diese Richtlinien-Aufträge, wie „Weiterdenken“ und „Problemstellungen erweitern“, umschreiben grob die Arbeitsaufträge, die die Schüler zum Variieren bestimmter Klassenarbeitsaufgaben erhielten. Näheres dazu in Kapitel 6.

Kapitel 5

Die Planung der Hauptuntersuchung

Die Anregungen, die Schupp (vgl. Kap. 3) für die Anwendungen von Aufgabenvariationen gibt, werden in diesem Kapitel aufgenommen und durch die lehrereigene Praxiserfahrungen vom Unterricht an der Gesamtschule ergänzt. Dabei wird in der Planung darauf geachtet, dass die Aufgabenvariationen sowohl qualitativ wie quantitativ ausgewertet werden sollen.

Schupp [51] schlägt für die verschiedenen Phasen der Unterrichtsplanung und -gestaltung (idealtypisch) vor:

> *Die anstehende Arbeit wird aufgeteilt. Hierbei sind unterschiedliche Sozialformen [...] möglich.*

Dabei zeigte die Unterrichtspraxis, dass nach einer Eingewöhnungszeit für die Lerngruppe der Unterricht schnell rhythmisiert werden konnte. Wenn am Anfang noch unbeantwortbare Fragen standen und das Unterrichtskonzept noch nicht durchgängig geklärt war, so entwickelte sich in einem überblickbaren Zeitrahmen ein praktikabler Unterrichtsstil.

Zur konkreteren Darstellung wird an dieser Stelle exemplarisch eine Unterrichtsentwicklung aufgegriffen, die in Kap. 6 genauer erläutert wird. Es wird hier deutlich, wie die Schülerinnen und Schüler sich im Variieren einer Mathematikaufgabe weiterentwickelten.

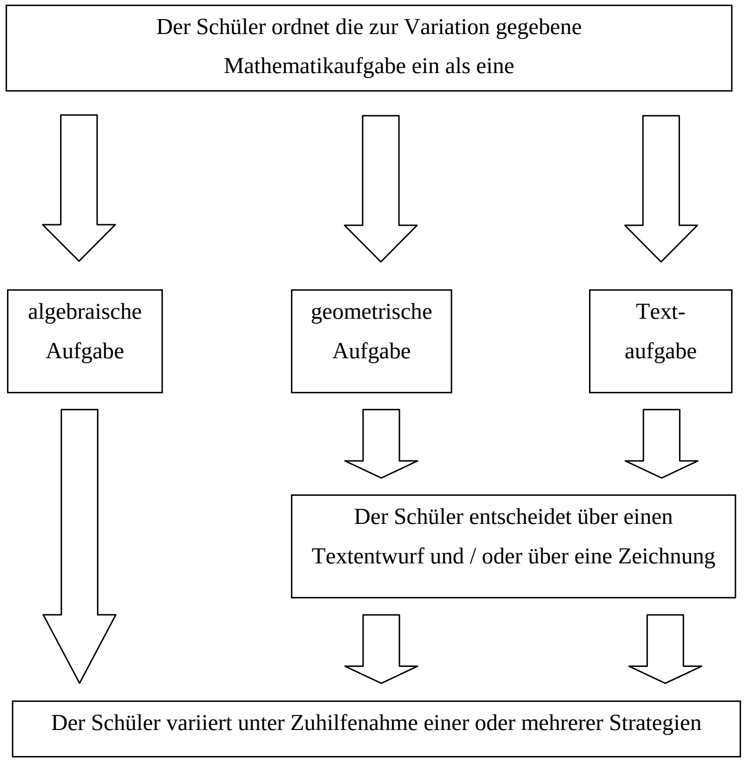


Abbildung 5.1

Unter Berücksichtigung der im letzten Kapitel genannten Bedingungen an das Lernen und Lehren im 9. und 10. Schuljahr eines Mathematik-E-Kurses einer Gesamtschule erfolgt nun die Darstellung der Unterrichtsplanung.

5.1 Die zeitliche Aufteilung der Aufgabenvariationen

Von den ca. 40 Unterrichtswochen eines Schuljahrs stehen per Saldo nur 36 zur Verfügung. Grund sind zum einen die durch Brauchtums- und Brückentage entstandenen halben Schulwochen sowie die halbe letzte Schulwoche. Ferner wird im 9. Schuljahr die Unterrichtszeit weiter durch das zweiwöchige außerhalb der Schule stattfindende Betriebspraktikum verkürzt.

Im 10. Schuljahr bedingen die Entlassung der Schüler ca. 2 Wochen vor Ende des Unterrichtsjahres und die einwöchige Abschlussfahrt den mehrwöchigen Unterrichtsausfall.

Genannte zeitliche Einengungen führten dazu, dass

- während der Klasse 9 jede 1 - 2 Wochen eine Aufgabe variiert wurde. Die Lerngruppe bearbeitete insgesamt 21 Übungseinheiten (siehe Überblicke in Kap. 6 und 8).
- innerhalb der 10. Klasse insgesamt 11 Aufgabenvariationen alle 2 - 3 Wochen durchgeführt wurden (siehe Variationsbeispiele aus der 9. und 10. Klasse).

5.2 Die Übungsphase und der Variationsbeginn

Die Auswahl der zur Variation bestimmten Aufgaben erfolgte längs der jeweils behandelten Stoffgebiete in der von der Fachkonferenz angegebenen Reihenfolge. Zwar kann man, wie dargestellt, Aufgabenvariationen bei jeder Mathematikaufgabe vornehmen, die Entscheidung über die Wahl der zu variierenden Aufgaben fiel auf drei Aufgabenkategorien: algebraische Aufgaben, geometrische Aufgaben und Textaufgaben, um eine möglichst breite Streuung zu erreichen.(vgl. Kap. 6.1).

Den üblichen Beginn einer Aufgabenvariation bildete eine Übungsaufgabe:

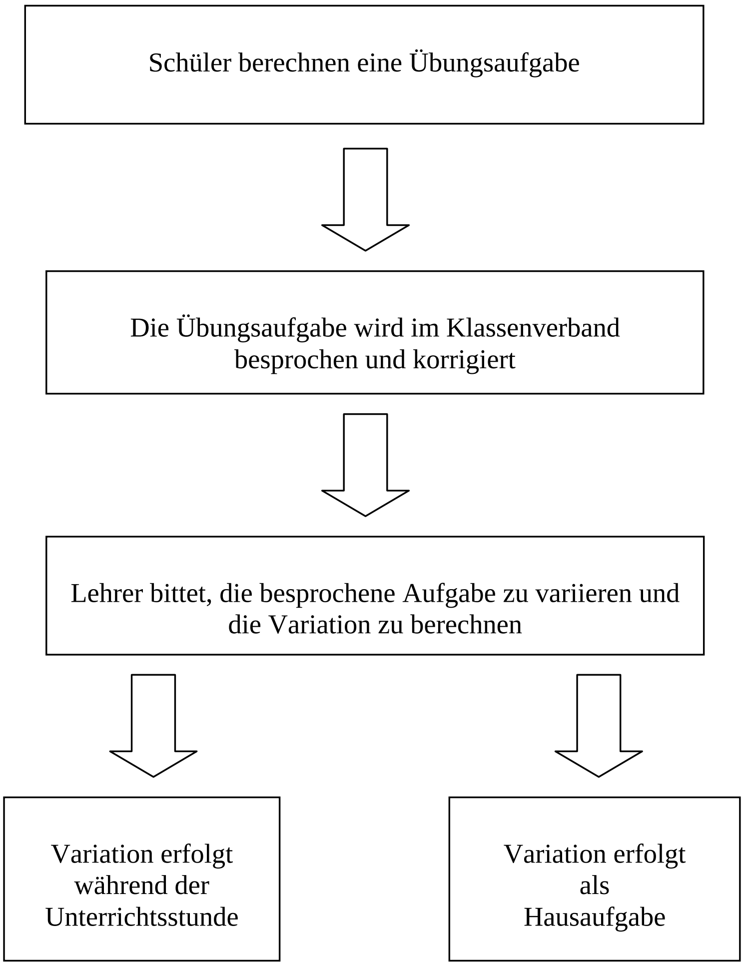


Abbildung 5.2

Anzufertigen waren die Variationsaufgaben der Übungsphase und die Variations-Hausaufgaben auf einem Extrablatt zum späteren Einsammeln und Bearbeiten, wie ab Kapitel 5.4 dargestellt.

5.3 Die Sozialformentwicklung in der Anfangszeit der Variationen

Zu Beginn des Unterrichtskonzeptes , als am Anfang der 9. Klasse Aufgabenvariationen unbekannt waren, hatten der Kurs und die vier fokussierten Schüler natürlich Vorbehalte.

Geplant war eine freie Wahl der Sozialform seitens der Schülerinnen und Schüler. Im Laufe der Zeit war aber zu beobachten, wie sowohl der ganze Kursverband als auch die vier Schüler es bevorzugten, allein und selbstständig Aufgaben zu variieren:

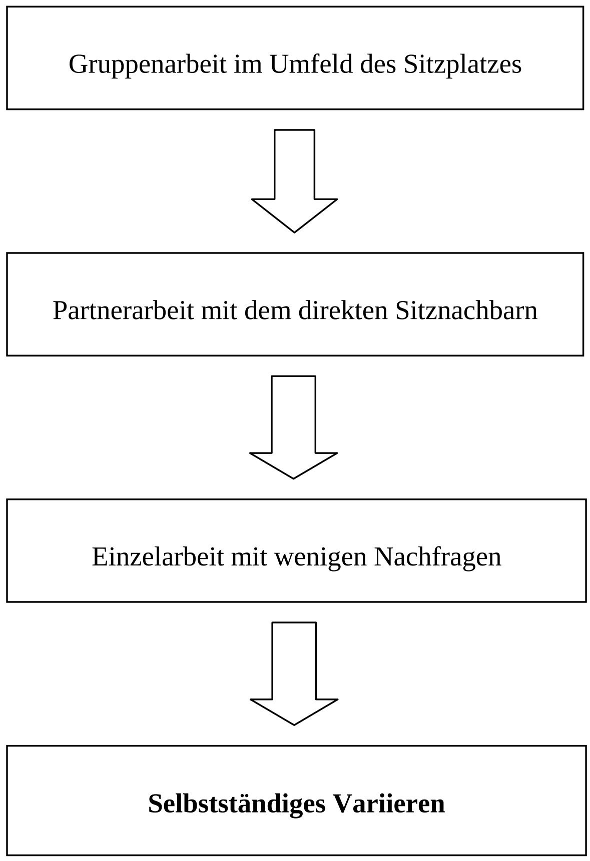


Abbildung 5.3

Das „selbstständige Variieren“ führte allerdings auch dazu, dass die Schülerinnen und Schüler in dieser Unterrichtsphase, je konzentrierter sie ihre Variationen bearbeiteten, keine Sozialkontakte zu ihren Klassenkameraden hatten.

Andererseits war an dieser Stelle des Unterrichtsablaufs das Variieren des einzelnen Schülers ohne Beeinflussung Zweiter, also ohne Partner oder Lerngruppe, ein gewünschtes Ziel dieser Untersuchung. Dadurch konnten die individuellen Kompetenzen völlig unbeeinflusst gemessen werden. Im Weiteren waren die gewünschten Entfaltungsmöglichkeiten des Einzelnen genauer zu beobachten. Der Schüler hatte die Möglichkeit, ein „aktives, selbständiges Mathematiktreiben“ (vgl. TIMS-Studie Kap. 1.5.3) in Verbindung mit einem Mehr an „systematischem Wiederaufgreifen und Vernetzen“ (ebd. Kap. 1.5.3) zu verwirklichen.

Hier verläuft zwar eine „Vereinsamung in der Sozialformentwicklung“ des einzelnen Schülers kontra dem Wunsch nach individueller (mathematischer) Entfaltungsmöglichkeit. In der Unterrichtsplanung sollte man an dieser Schaltstelle der Untersuchungen den Schwerpunkt auf die Schülerindividualität setzen.

5.4 Die Phase des Ordnens der Aufgabenvariationen

Nach der Phase des selbstständigen und unabhängigen Variierens, ohne Nachbarschafts- oder Lehrerhilfe, ist ein umsichtiges Ordnen wichtig. Man kann dies als Unterrichtender praktischerweise mit einer Hausaufgabenkontrolle verbinden.

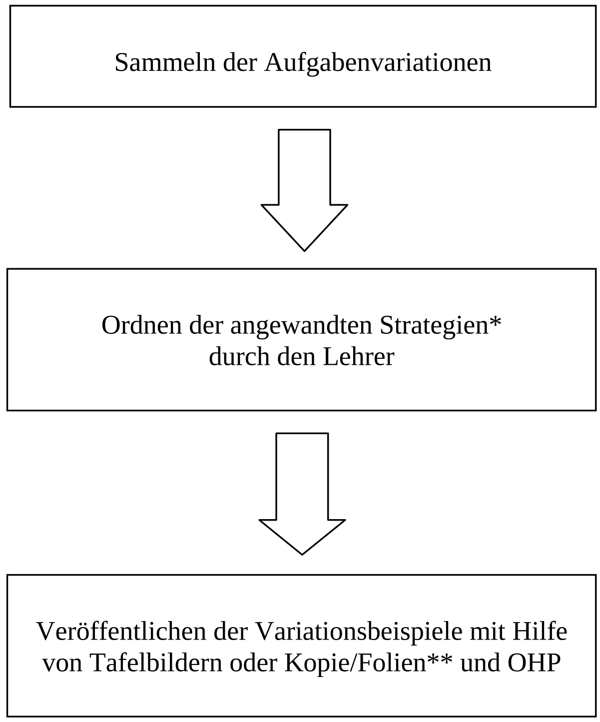


Abbildung 5.4

*) Siehe Kapitel 3.3. An dieser Stelle der Auswertungen hat der Lehrer die Möglichkeit, für den nachfolgenden Unterricht in besonderer Weise lenkend einzugreifen. Da die Schülerinnen und Schüler in ihren abgegebenen Aufgabenvariationen unterschiedliche Strategien verwenden, kann hier der Unterrichtende vorausschauend Schwerpunkte für die weiteren Auswertungen setzen. Er hat hier die Möglichkeit, lenkend auf die spätere Strukturierung der Diskussion über die angewandten Strategien einzuwirken. Dadurch kann er die schon im Vorhinein die spätere Diskussionsphase (vgl. Kap. 5.5) effizienter gestalten. Er kann ferner dadurch solchen Strategien eine besondere Betonung verleihen, die in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen wünschenswert sind, z. B. der Kombination von Strategien.

**) Lehrer oder Schüler schreiben ihre Variation an die Tafel oder fertigen eine Folie an, die über OHP veröffentlicht wird.

Beim Ordnen der Variationen wählt man als Lehrer Beispiele aus den verschiedenen Strategieanwendungen aus, um sie zur anschließenden Diskussion zu verwenden. Zu bedenken ist dabei, dass die Übungsphasen häufig im letzten Drittel der Mathematikstunde liegen. Man muss hier als Lehrer unter Berücksichtigung des Zeitfaktors seine Entscheidungen über den Unterrichtsablauf fällen.

5.5 Die Phase der Variationsdiskussion

Diese Phase ist mit die wichtigste im ganzen Variationsgeschehen. In dieser Phase wird analysiert, gewertet, gewichtet und schließlich durch die häufige Wiederholung der Variationen verinnerlicht und gelernt.

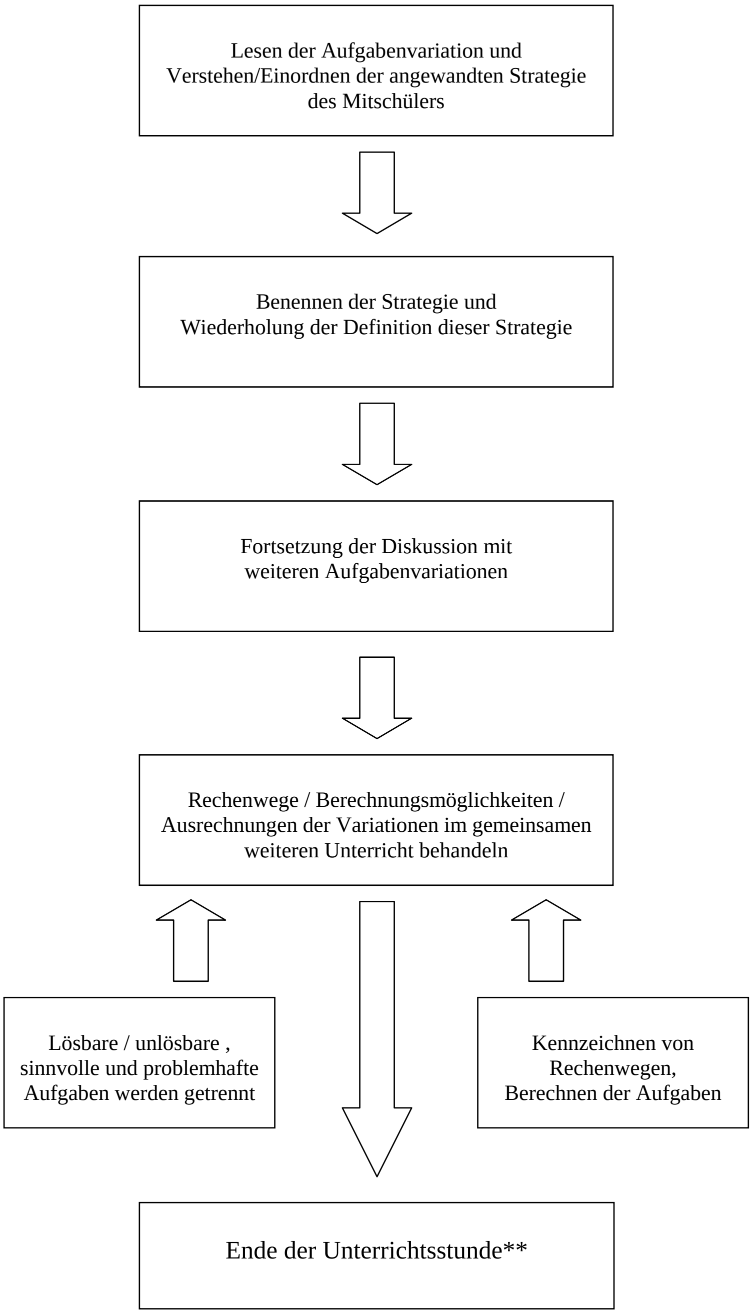


Abbildung 5.5

*) Diese weiteren Beispiele hat man als Lehrer in der Zwischenzeit vorläufig sondiert. **) Spätestens hier endet die Unterrichtsstunde. Die weiteren Auswertungen müssen lehrerseitig in der (häuslichen) Nacharbeit geregelt werden.

5.6 Die Reflektionsphase

Die obige unter **) genannte weitere Auswertung bleibt dem Lehrer, der eine Übersicht über die Variationsentwicklung seiner Schüler haben will, nicht erspart. Jedoch macht genau das die Arbeit interessant (vgl. Kap. 6.6). Der Lehrer erfährt hier, in wie weit sich welche Strategien gefestigt haben und andere sich weiterentwickeln:

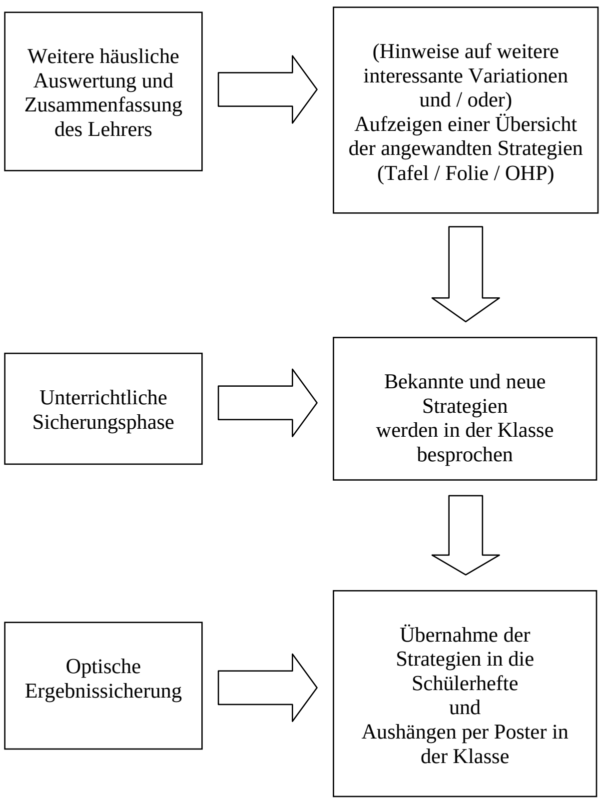


Abbildung 5.6

5.7 Aufgabenvariationen in Klassenarbeiten

Eine Besonderheit der Untersuchungen dieser Arbeit sind die Auswertungen der Aufgabenvariationen innerhalb von Klassenarbeiten (siehe Kap. 6.7). Mit freundlicher Genehmigung des Schulleiters, Herrn Demmer, konnte in den Klassenarbeiten des Kurses immer eine Aufgabe aufgenommen werden, die den Wortlaut hatte:

Variiere die
(von dir bereits gerechnete)
Aufgabe Nr. ...
und bestimme, wenn möglich,
die Lösung deiner Variation!

Abbildung 5.7

Die Bepunktung einer solchen Aufgabenvariation wurde bei jeder Klassenarbeit auf maximal 5 - 10 % der Gesamtpunktzahl der Klassenarbeit festgelegt. Die Höchstpunktzahl der Aufgabe konnte dann in Abhängigkeit von der Variationsqualität und den angedachten Lösungsschritten erreicht werden (siehe Kap. 6.7 und Variationsbeispiele von Klassenarbeitsaufgaben im Anhang).

Kapitel 6

Die Hauptuntersuchung im Klassenverband

Die Hauptuntersuchung im Klassenverband wurde während der 9. Klasse im Schuljahr 2000/2001 mit allen Schülern des Mathematik-Erweiterungskurses durchgeführt wurden. Alle 1 bis 2 Wochen bekam jeder Schüler des Kurses eine Mathematikaufgabe zur Variation vorgegeben, die gemäß den Ablaufschemata (vgl. Kap. 5) bearbeitet wurde. Die Unterbrechung zwischen der 8. und 12. Schulwoche war durch das Schülerbetriebspraktikum der 9. Klasse bedingt. Zwischen der 12. und 15. Schulwoche befanden sich die Auswertungs- und Vertiefungsphasen des Praktikums mit externen Besuchen.

Die Zuordnung einer Aufgabenvariation zu einer Strategie (vgl. Kap. 3.3), wobei die verschiedenen Variationen quantitativ erfasst wurden (vgl. Kap. 3.4), führte hauptsächlich der Lehrer durch. Lediglich in den Reflektionsphasen (vgl. Kap. 6.6) nahmen auch Schüler diese Zuordnungen vor. Die Einordnung einer Aufgabenvariation erfolgte also in zwei Schritten (vgl. Kap. 3.3):

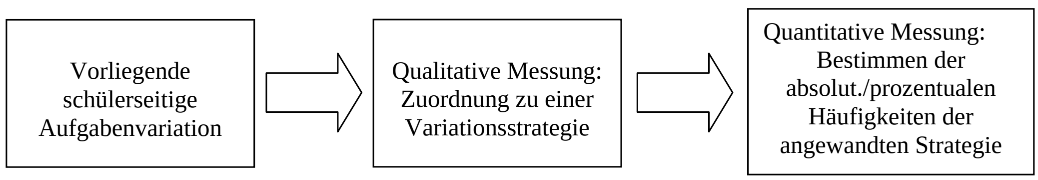


Abbildung 6.1

Unter Zuhilfenahme der prozentualen Häufigkeiten wurden im Laufe dieses 9. Schuljahres Beobachtungen, Auswertungen und Rückschlüsse auf die

Kompetenz im Fach Mathematik vorgenommen, die im Weiteren erläutert werden.

6.1 Die zur Variation bestimmten Aufgaben

Im Anschluss an eine Übungsphase forderte der Lehrer zur Variation einer gerade berechneten Mathematikaufgabe auf (vgl. Kap. 5.2). Entsprechend dem schulinternen Lehrplan (Kap. 4.5) wurden die Aufgaben dem Schulbuch (Kap. 4.4) weitestgehend entnommen. Lediglich die Aufgaben in der 24. und 26. Woche stammten aus Arbeitsblättern (Anlage 6).

Die speziell zur Variation bestimmten Mathematikaufgaben bildeten einen Querschnitt aus

- zumeist offenen aber
- teilweise auch geschlossenen Aufgabenstellungen.

Ferner war ein Auswahlkriterium, dass die Mathematikaufgaben eine, in Abhängigkeit vom Stoffinhalt, ausgewogene Auswahl aus drei Kategorien bildeten:

- Algebraische Aufgaben,
- Aufgaben mit mehr geometrischem Charakter, die durch eine Zeichnung oder Tabelle unterstützt werden und als Arbeitsauftrag eine Berechnung oder wiederum eine Zeichnung beinhalten
- und schließlich Aufgaben, die fast ausschließlich in Textformat vorlagen und als Variation vielfach auch als Text abgegeben wurden.

Nachstehende Übersicht erläutert die Verteilung der Aufgaben aus den unterschiedlichen Kategorien innerhalb der Schuljahrwochen:

Tabelle: 6.1:

Anzahl der Aufgaben	Aufgabenart	Schuljahrwoche
8	Termberechnungen und Gleichungstermberechnungen	1, 2, 4, 15, 17, 25, 27, 29

8	Bearbeitungen von Arbeitsanweisungen mit Zeichnung oder Tabelle	5, 6, 8, 12, 21, 22, 24, 35
5	Textaufgaben bearbeiten	19, 20, 26, 31, 33

Eine Kurzbeschreibung der Aufgabeninhalte ist folgender Tabelle zu entnehmen:

Tabelle: 6.2:

Schuljahrwoche	Zur Variation bestimmte Aufgabe	Didaktische Einordnung
1. Woche	(S. 84, Nr. 8) Summe von Quadraten natürlicher Zahlen berechnen: z. B. $4^2 + 9^2$	Mathematischer Term
2.	(S. 97, Nr. 7) Anwendung der binomischen Formel auf Wurzelterme: z. B. $(2 * \sqrt{5} - \sqrt{10})^2$	Mathematischer Term
4.	(S. 99, Nr. 5) Definitionsmengenbestimmung eines einfachen Quadratwurzelterms: z. B. $\sqrt{(2x - 1)}$	Mathematischer Term

5.	(S. 109, Nr. 8c) Berechne die Länge der Dachsparren [eines pyramidalen Daches] bei angegebener quadratischer Grundseite und Höhe des Daches.	Arbeitsanweisung mit Zeichnung / Satz des Pythagoras
6.	(S. 107, Nr. 3) Fehlende Größen eines Würfels mit Hilfe einer einzigen gegebenen Größe berechnen: Seitenkante Flächendiagonale Raumdiagonale Oberfläche Volumen	Arbeitsanweisung in Tabellenform / Satz des Pythagoras
8.	(S. 108, Nr. 4) Umfang und Flächeninhalt in einem gleichschenkligen Trapez bei drei gegebenen Seitenlängen berechnen.	Arbeitsanweisung mit Zeichnung / Satz des Pythagoras
12.	(S. 125, Nr. 5a) Zeichne den Graphen von folgendem Funktionsterm: z. B. $f(x) = (x - 3)^2 - 4$	Funktionsterm zeichnen / Verschobene Normalparabel

15.	(S. 136, Nr. 4) Bestimme die Lösungsmengen von reinquadratischen Gleichungen: z. B. $x^2 - 169 = 0$	Gleichungsterm / reinquadratische Gleichung
17.	(S. 144, Nr. 7) Lösungsmengen bestimmen von quadratischen Gleichungen mit einem Faktor vor dem x^2: z. B. $2x^2 + 1,5x = 140$	Gleichungsterm / gemischtquadratische Gleichung
19.	(S. 145/146, Nr. 2 bis 13) Freie Auswahl einer Textaufgabe zum Thema Zahlenrätsel oder Altersrätsel oder Geometrie.	Textaufgabe / Anwendung quadratischer Gleichungen
20.	(S. 159/160, Nr. 2 bis 13) Freie Auswahl einer Textaufgabe zum Thema Kreisumfang und Kreisfläche.	Textaufgabe / Berechnungen am Kreis
21.	(S. 161, Nr. 19/20) Gekennzeichnete Kreisteile in einem Quadrat oder Kreis berechnen.	Arbeitsanweisung mit Zeichnung / Berechnungen von Kreisteilen

22.	(S. 167, Nr. 6) Volumen und Masse von zusammengesetzten Zylindern berechnen.	Arbeitsanweisung mit Zeichnung / Berechungen von zusammengesetzten Zylindern
24.	(Arbeitsblatt) Zusammengesetzte Körper: Berechnen von Gesamtvolumina bei gegebenen Einzelmaßen.	Arbeitsanweisung mit Zeichnung / Berechnungen von zusammengesetzten Körpern
25.	(S. 38, Nr. 5) Löse das Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren: z. B. $3y - 5x = 11$ und $3y + 1 = 12x$	Mathematische Terme
26.	(Arbeitsblatt) Freie Auswahl einer Textaufgabe zum Thema Zusammengesetzter Dreisatz.	Textaufgabe / Berufseinstellungstesttraining
27.	(S. 41, Nr. 3) Löse das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren: z. B. $11x - 3y = 6$ und $2y - 6x = 4$	Mathematische Terme

29.	(S. 46, Nr. 2) Löse das Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren: z. B. $3x + 3y - 2z = -7$ und $4x + 5y - 4z = -13$ und $7x - 2y + 6z = 10$	Mathematische Terme
31.	(S. 48, Nr. 1 bis 4) Freie Auswahl einer Textaufgabe zum Thema Zahlenrätsel oder Altersrätsel.	Textaufgabe / Gleichungssysteme
33.	(S. 50, Nr. 1 bis 8) Freie Auswahl einer Textaufgabe zum Thema Wirtschaftsaufgaben.	Textaufgabe / Gleichungssysteme
35.	(S. 65, Nr. 3) Zentrisches Strecken eines Quadrates oder Rechtecks oder Dreiecks bei eingezeichnetem Streckzentrum und Bildpunkt.	Arbeitsanweisung mit Zeichnung / Zentrische Streckung

Zumeist offene, zum Teil aber auch geschlossenen Aufgaben, die aus den drei Kategorien der algebraischen, geometrischen und Textaufgaben entnommen waren, sollten einen größtmöglichen Querschnitt zu den an ihnen vorzunehmenden Variationen bilden.

6.2 Erste Ergebnisse: Die am häufigsten angewandten Strategien

Bei der Sichtung der mehreren hundert Aufgabenvariationen des 9. Schuljahres war im Rahmen der Untersuchungen dieser Arbeit auffällig, dass die Schüler bestimmte Strategien bevorzugten Es waren dies die

- Trivial-Strategie, Analogisieren-Strategie und Strategie-Kombinationen, also Verknüpfungen mehrerer Analogisieren-Strategien miteinander bzw. mit anderen Strategien.

Damit man sich ein erstes Bild von der Verteilung und Häufigkeit innerhalb des Schuljahres machen kann, folgen im Rahmen einer Vorveröffentlichung als erste Ergebnisse die prozentualen Verteilungen. Es sind dies auch die ersten quantitative Messergebnisse, die absichtlich ohne Berücksichtigung der Aufgabenkategorien erhoben wurden und dabei interessante Einsichten liefern.

6.2.1 Graphische Darstellungen der drei bevorzugten Strategien

Schupp [51] führt die Notwendigkeit von „Feldversuchen“ an (siehe Übersicht - eigene Forschungsfragen), mit denen er die Frage

> *Welche Standardmöglichkeiten (Strategien, Routinen) gibt es nun zur Variation einer (gelösten) Aufgabe?*

untersuchen möchte. Diese Frage lässt sich wie folgt beantworten:

Keine anderen Strategien (vgl. Kap. 3.4) wurden von den Schülern so häufig angewandt wie die hier beschriebenen und graphisch dargestellten. Ihre Verteilung zeigt zum einen die Anwendung der drei bevorzugten Strategien über das Schuljahr hinweg. Zum andern kann man feststellen, dass die Trivial-Strategie im ersten und zweiten Halbjahr abnehmende Tendenzen aufzeigt:

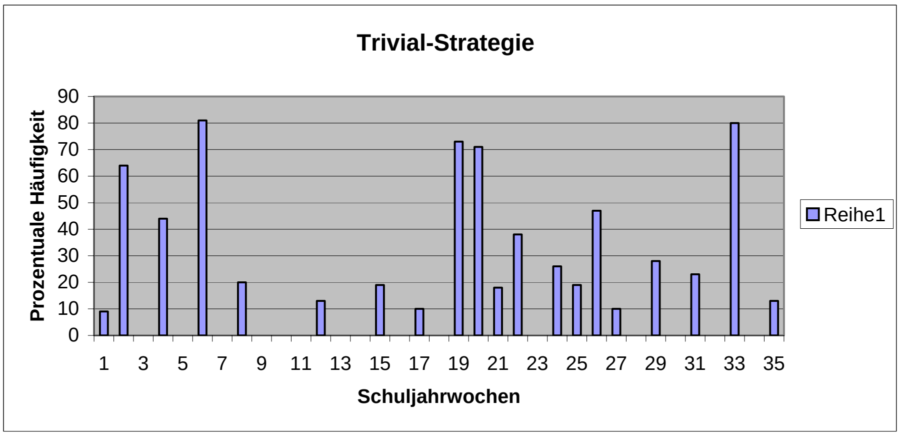


Abbildung 6.2

Es zeigte sich, dass die Schüler im Schuljahresverlauf vermehrt die Analogisieren-Strategie anwandten, wobei sie mathematische Kompetenz und heuristische Fähigkeiten einbrachten (vgl. Kap. 6.3 - 6.6):

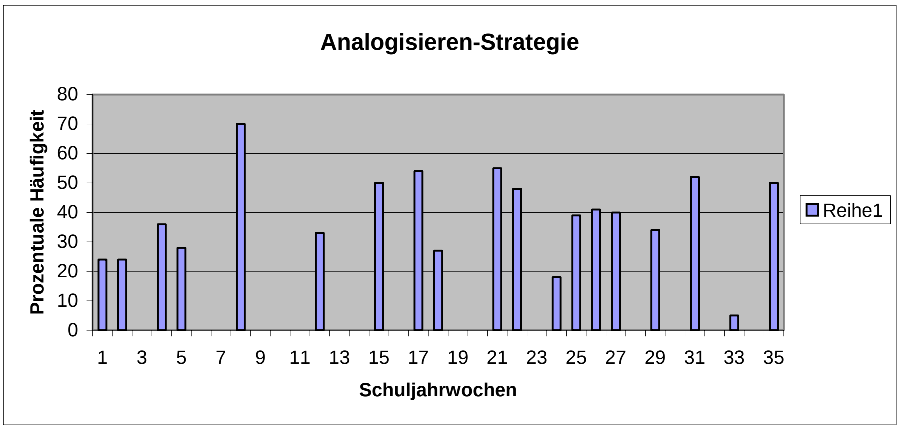


Abbildung 6.3

Da nun die Schüler vermehrt die Analogisieren-Strategie in ihren Variationen benutzen, nahmen auch die Kombinationen mehrerer Analogisieren-Strategien zu:

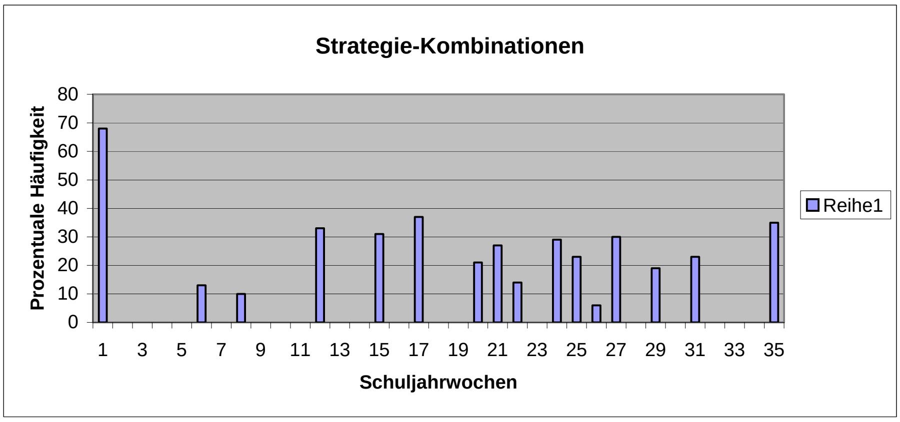


Abbildung 6.4

6.2.2 Beispiele für Strategieanwendungen

Die folgenden Schülervariationen zeigen jeweils ein Beispiel der drei bevorzugten Strategien aus dem 9. Schuljahr.

Beispiel Analogisieren-Strategie:

Dieses Beispiel hatte als Startaufgabe eine Textaufgabe zum Thema Zahlenrätsel (31. Schulwoche/Aufgabenart: Gleichungssysteme). Bemerkung: Der Schüler, der diese Variation entwarf, ist Legastheniker.

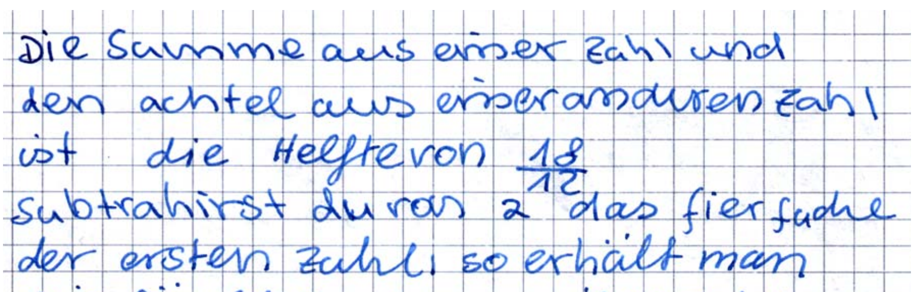


Abbildung 6.5

Beispiel Trivial-Strategie:

Das Beispiel für die Trivial-Strategie hatte als Startaufgabe das Berechnen der fehlenden Größen eines Würfels bei einer angegebenen Größe (6. Schulwoche/Aufgabenart: Bearbeiten von Arbeitsanweisungen mit Tabelle).

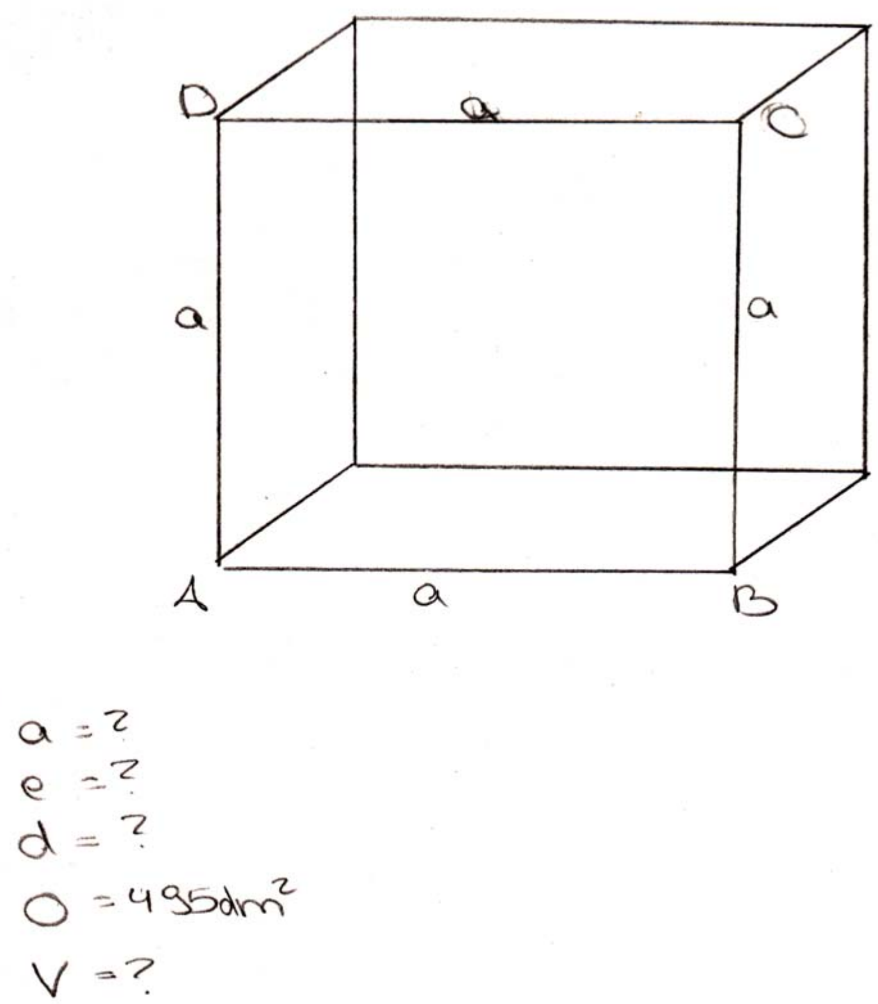
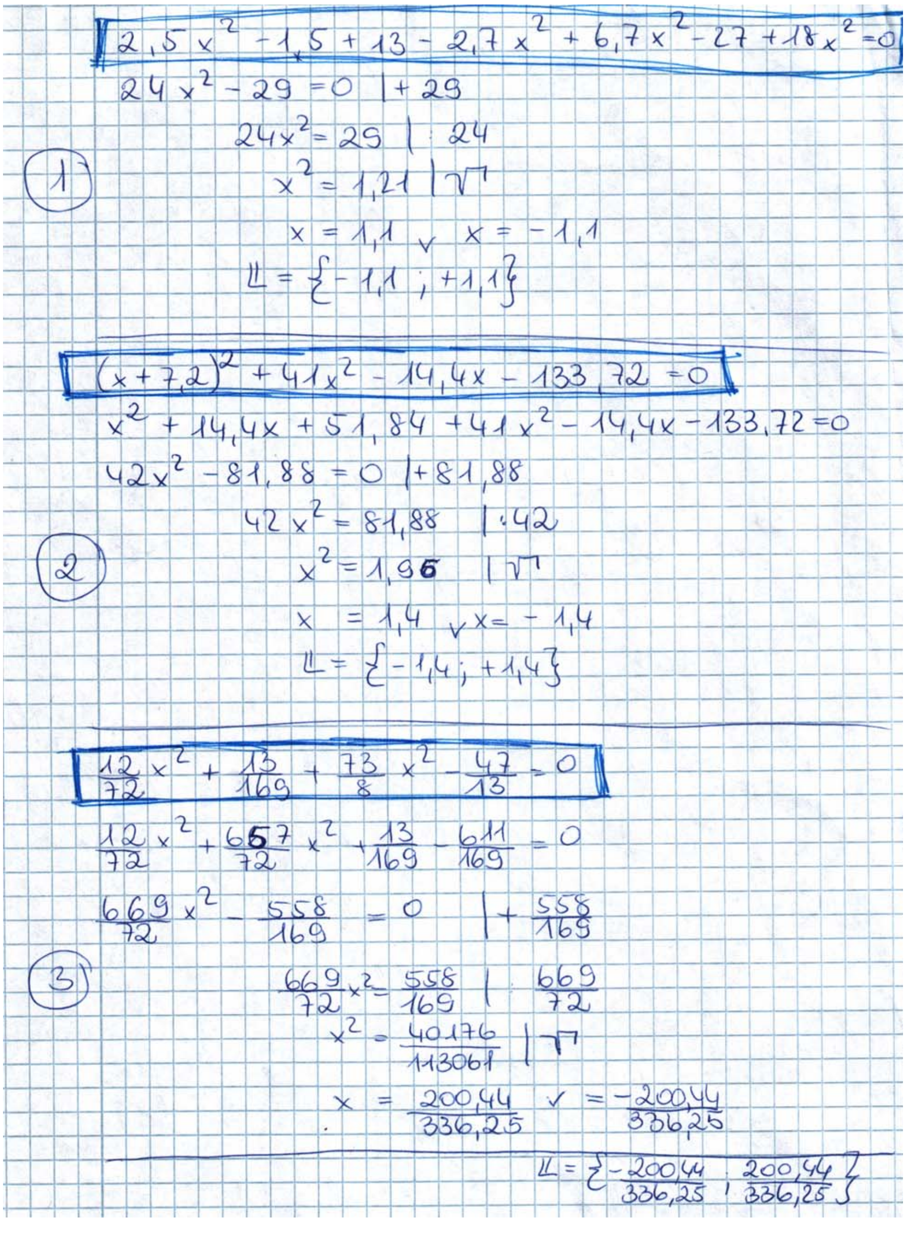


Abbildung 6.6

Beispiel Strategie-Kombinationen:

Das Beispiel für Strategie-Kombinationen hatte als Startaufgabe das Bestimmen der Lösungsmenge einer reinquadratischen Gleichung (15. Schulwoche im 9. Schuljahr/Aufgabenart: Term- und Gleichungstermberechnungen). Die Schülerin gab bei ihren Variationen auch ihre Ergebnisse mit ab.



$$\boxed{2{,}5x^2 - 1{,}5 + 13 - 2{,}7x^2 + 6{,}7x^2 - 27 + 18x^2 = 0}$$

$$24x^2 - 29 = 0 \quad | +29$$
$$24x^2 = 29 \quad | :24$$
(1)
$$x^2 = 1{,}21 \quad | \sqrt{\ }$$
$$x = 1{,}1 \vee x = -1{,}1$$
$$\mathbb{L} = \{-1{,}1 ; +1{,}1\}$$

$$\boxed{(x+7{,}2)^2 + 41x^2 - 14{,}4x - 133{,}72 = 0}$$

$$x^2 + 14{,}4x + 51{,}84 + 41x^2 - 14{,}4x - 133{,}72 = 0$$
$$42x^2 - 81{,}88 = 0 \quad | +81{,}88$$
$$42x^2 = 81{,}88 \quad | :42$$
(2)
$$x^2 = 1{,}96 \quad | \sqrt{\ }$$
$$x = 1{,}4 \vee x = -1{,}4$$
$$\mathbb{L} = \{-1{,}4 ; +1{,}4\}$$

$$\boxed{\frac{12}{72}x^2 + \frac{13}{169} + \frac{73}{8}x^2 - \frac{47}{13} = 0}$$

$$\frac{12}{72}x^2 + \frac{657}{72}x^2 + \frac{13}{169} - \frac{611}{169} = 0$$
$$\frac{669}{72}x^2 - \frac{558}{169} = 0 \quad | + \frac{558}{169}$$
(3)
$$\frac{669}{72}x^2 = \frac{558}{169} \quad | : \frac{669}{72}$$
$$x^2 = \frac{40176}{113061} \quad | \sqrt{\ }$$
$$x = \frac{200{,}44}{336{,}25} \vee = -\frac{200{,}44}{336{,}25}$$
$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{200{,}44}{336{,}25} ; \frac{200{,}44}{336{,}25}\right\}$$

Abbildung 6.7

Bis hierhin wurde die Aufgabenvariationen längs des ganzen Schuljahres in ihrer Gesamtentwicklung dargestellt. Im Weiteren werden nun die Aufgabengruppen untersucht, denen die jeweiligen Startaufgaben entnommen wurden.

6.3 Qualitative Variationsmessungen bei Aufgaben mit Term- und Gleichungstermberechnungen

6.3.1 Exemplarische Variationsmessung der ersten Startaufgabe als qualitative Beurteilung

Die Kategorisierung der zur Variation bestimmten Aufgaben stellte sich nicht nur in der Planung (vgl. Kap. 5) sondern auch in den Ergebnissen der Aufgabenvariationen als interessant heraus. Daher folgt für je eine Aufgabe einer Kategorie exemplarisch eine fachdidaktische Betrachtung im Sinne einer Erhebung überhaupt möglicher Variationen (vgl. auch Kap. 6.4.1, 6.5.1), die von den Schülerinnen und Schülern hätten durchgeführt werden können.

Fachdidaktische Aspekte der ersten Aufgabe zur Termberechnung:

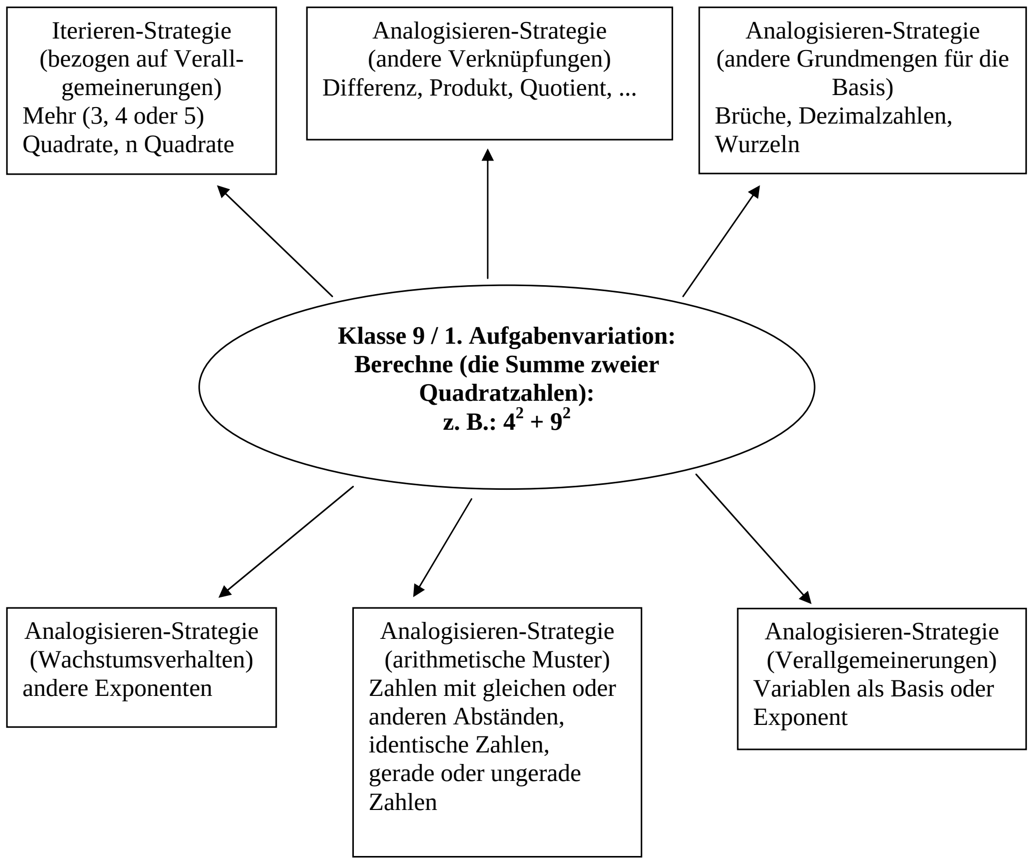


Abbildung 6.8

Nachfolgend die von den Schülern erarbeiteten Variationen zur ersten Aufgabe:

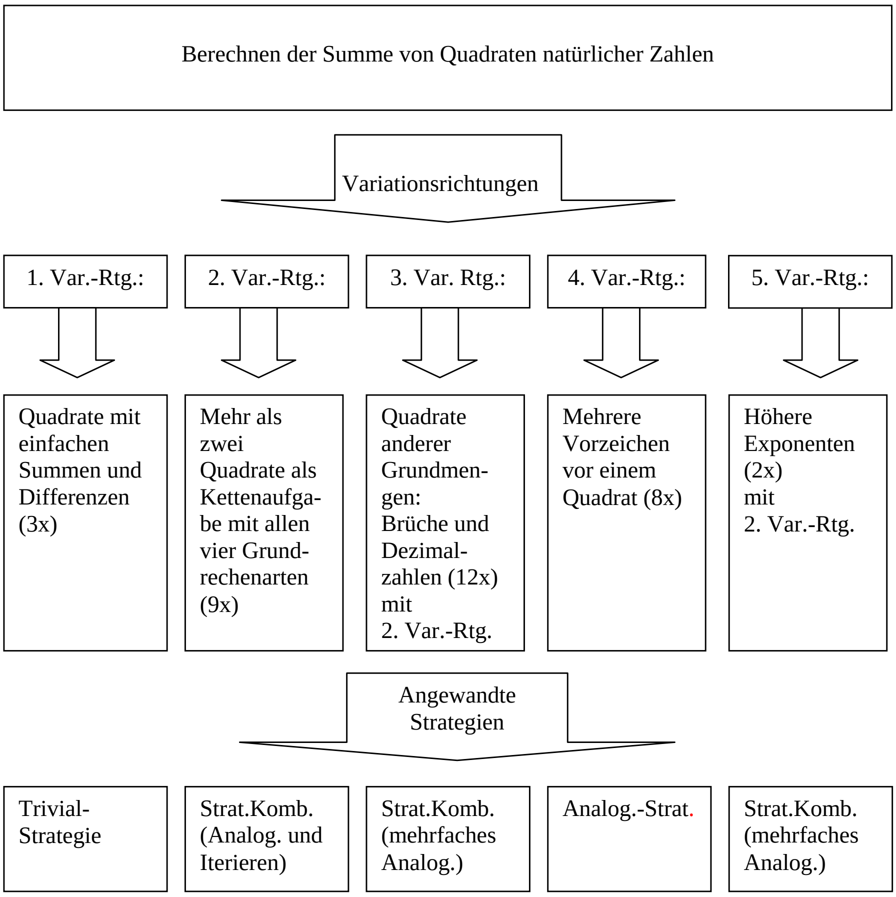


Abbildung 6.9

Bemerkung:

Variationen in den Richtungen arithmetischer Muster und Variablen nahmen die Schülerinnen und Schüler nicht vor. Ihr Zögern kann zurückgeführt werden auf die noch vorhandene Unkenntnis im Umgang mit Aufgabenvariationen.

Um in den folgenden Unterkapiteln über die weiteren quantitativen Variationsmessungen Wiederholungen in der Darstellung zu vermeiden, entfallen die graphischen Elemente. Die Auswertungen werden, wie folgt, als eine Zusammenfassung der qualitativen Messergebnisse dargestellt.

6.3.2 Die qualitativen Beurteilungen der weiteren Startaufgaben

Tabelle: 6.3:

Startaufgaben	Variationsrichtungen	Anzahlen der Var.	Angewandte Strategien
2) Anwendung der binomischen Formel auf Wurzelterme	Einfache binomische Terme mit Wurzelausdrücken	13	Trivial-Strat.
	Desgl. mit größeren Zahlen	3	Trivial-Strat.
	Zwei und mehr binomische Terme in einer Aufgabe	3	Iterieren-Strat.
	Binomische Terme anderer Grundmengen: Brüche und Dezimalzahlen	5	Analog.-Strat.
	Produkte von Summen mit Wurzeltermen	1	Analog.-Strat.
	Terme mit höheren Exponenten	1	Analog-Strat.
3) Bestimmen der Definitionsmenge eines einfachen Quadratwurzel-terms	Quadratwurzelterme mit einfachen Summen und Differenzen	11	Trivial-Strat.
	Quadratwurzelterme mit mehr als 2 Summanden	5	Iterieren-Strat.
	Koeffitienten aus anderen Grundmengen: Brüche und Dezimalzahlen	2	Analog.-Strat.
	Mehrere Vorzeichen im Wurzelterm vor Summanden	3	Analog.-Strat.
	Mehrere Variablen im Wurzelterm	4	Analog.-Strat.
4) Bestimmen der Lösungsmenge von reinquadrati-schen Gleichungen	Einfache reinquadratische Gleichungen mit 2 Summanden	6	Trivial-Strat.
	Reinquadratische Gleichungen mit mehreren Summanden mit 3. Var.-Rtg.	2	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Summanden aus anderen Grundmengen: Brüche und Dezimalzahlen	12	Analog.-Strat.
	x^2 durch x^3 ersetzt zur kubischen Gleichung mit 3. Var.-Rtg.	8	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Reinquadratischen Term durch binomischen Term ersetzt	4	Analog.-Strat.

5) Bestimmen der Lösungsmenge von gemischtquadratischen Gleichungen Einfache	gemischtquadratische Gleichung mit 2 Summanden	4	Trivial-Strat.
	Zu quadratischen Gleichungen ergänzt	6	Analog.-Strat.
	Binom als quadratische Gleichung	2	Analog.-Strat.
	Koeffizienten und Summanden aus anderen Grundmengen: Brüche, irrationale Zahlen und Dezimalzahlen	14	Analog.-Strat.
	Kettenaufgabe aus mehreren quadratischen, linearen und absoluten Termen mit 3. Var.-Rtg.	5	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	x^2 durch x^3 und x^4 ersetzt mit 3. Var.-Rtg.	10	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
6) Lösen eines Gleichungssystems mit dem Gleichsetzungsverfahren	Einfache Gleichungssysteme mit ganzzahligen Koeffizienten	6	Trivial-Strat.
	Durch Ersetzen von x mit x^2 auf quadratische Gleichung zurückgeführt mit 3. Var.-Rtg.	7	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Koeffizienten aus anderen Grundmengen: Brüche, irrationale Zahlen, und Dezimalzahlen	12	Analog.-Strat.
	Einzelne Gleichungen in algebraische Terme eingekleidet	4	Blickrichtungänderungs-Strat.
	Gleichungssystem in einem Koordinatensystem als Geradengraph angegeben und zur Lösung aufgefordert	2	Umkehren-Strat.
7) Lösen eines Gleichungssystems mit dem Einsetzungsverfahren	Einfache Gleichungssysteme mit ganzzahligen Koeffizienten	4	Trivial-Strat.
	Durch Ersetzen von x mit x^2 auf quadratische Gleichung zurückgeführt mit 3. Var.-Rtg.	12	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Koeffizienten aus anderen Grundmengen: Brüche, irr. Zahlen und Dezimalzahlen	13	Analog.-Strat.
	Einzelne Gleichungen in algebraische Terme eingekleidet	8	Blickrichtungänderungs-Strat.
	Mehrere Vorzeichen vor einem Term	3	Analog.-Strat.

8) Lösen eines Gleichungssystems (drei Gleichungen mit drei Variablen) mit dem Additionsverfahren	Einfache Gleichungssysteme mit ganzzahligen Koeffizienten	9	Trivial-Strat.
	Durch Ersetzen von x, y, und z durch höhere Potenzen zu einer unlösbaren Aufgabe variiert mit 3. Var.-Rtg.	5	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Koeffizienten aus anderen Grundmengen: Brüche, irr. Zahlen und Dezimalzahlen	11	Analog.-Strat.
	Einzelne Gleichungen in algebraische Terme eingekleidet	6	Blickrichtungänderungs-Strat.
	Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 4 Variablen aufgestellt und gelöst	1	Strat.-Komb. (Analogisieren und Iterieren)

6.3.3 Die Strategieübersicht als quantitative Beurteilung

Zählt man die Strategiehäufigkeiten aus, so erhält man folgende Summen:

Tabelle: 6.4:

Startaufgabe	Trivial-Strat.	Iterieren-Strat.	Analog-Strat.	Strat.-Komb.	Blickricht.-Strat.	Umkehren-Strat.	Aufgabe mit Lösung abgegeben
1.	3	-	8	23	-	-	3
2.	16	3	7	-	-	-	4
3.	11	5	9	-	-	-	-
4.	6	-	16	10	-	-	10
5.	4	-	22	15	-	-	5
6.	6	-	12	7	4	2	6
7.	4	-	16	12	8	-	4
8.	9	-	11	6	6	-	7

6.3.4 Die Auswertungen der Messergebnisse bei den Variationen der algebraischen Startaufgaben

Die obige Übersicht über die eingesetzten Strategien zeigt, dass die Schüler in der Bearbeitung ihrer Aufgabenvariationen ihre Sichtweise in verschiedene Richtungen öffneten.

- Je mehr sie sich an das Variieren gewöhnten, desto mehr nahmen sie auch die Möglichkeit wahr, Strategien untereinander zu kombinieren.

Daher ist die Iterieren-Strategie nach ihrem ersten Auftreten nur noch selten vertreten. Sie wurde innerhalb der Aufgabenvariationen gerne mit der Analogisieren-Strategie kombiniert. Später griffen die Schüler auch auf andere Variationsstrategien zurück, z.B. änderten sie dann die Blickrichtung innerhalb ihrer Variationen und kleideten dabei die Aufgabe in zusätzliche Bearbeitungsaufforderungen ein.

Aufgabenvariationen bei offenen/geschlossenen Aufgabenstellungen:

War eine Aufgabenstellung schon sehr differenziert, so reagierten die Schüler mit einem nur verhaltenen Variationsinteresse. Einfache Aufgaben waren dagegen geradezu ein Motivations- und Variationsmotor.

[1] EdN(1)

7. Wende die binomischen Formeln an und forme um wie im Beispiel.

a) $(2\sqrt{5}-\sqrt{10})^2$ b) $(3\sqrt{6}-\sqrt{8})^2$
c) $(2\sqrt{7}-\sqrt{14})^2$ d) $(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2$
e) $(\sqrt{3}-\sqrt{12})^2$ f) $(5\sqrt{6}+\sqrt{10})^2$
g) $(2\sqrt{8}+\sqrt{11})^2$ h) $(3\sqrt{12}+\sqrt{5})^2$
i) $(\sqrt{14}+\sqrt{6})^2$ k) $(\sqrt{10}+\sqrt{15})^2$
l) $(3\sqrt{2}+5\sqrt{3})^2$ m) $(6\sqrt{5}+5\sqrt{2})2$
n) $(5\sqrt{7}-6\sqrt{2})^2$ o) $(6\sqrt{10}-3\sqrt{5})^2$
p) $(4\sqrt{2}+3\sqrt{7})(4\sqrt{2}-3\sqrt{7})$
q) $(9\sqrt{5}+6\sqrt{3})(9\sqrt{5}-6\sqrt{3})$

Abbildung 6.10

[1] EdN: Beispiele: enge/offene Aufgabe mit entspr. Variationsbeispielen

1) $(15301\sqrt{4701}+\sqrt{36})^2$

2) $(301\cdot\sqrt{303}-\sqrt{1})^2$

3) $(222\sqrt{1.000.020}+\sqrt{6})^2$

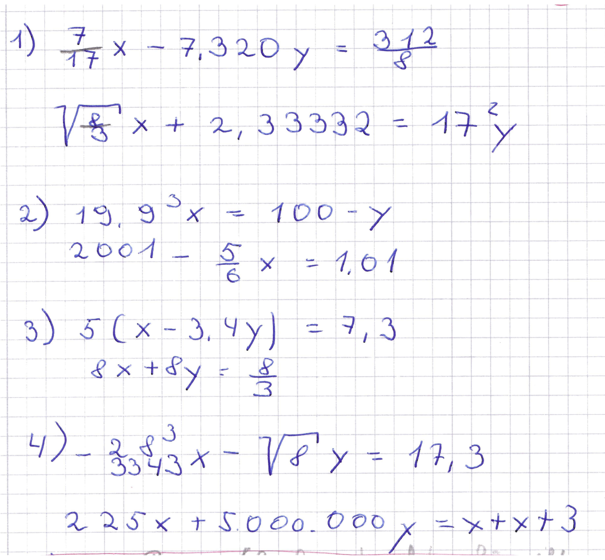
Abbildung 6.11

4. Forme beide Gleichungen des linearen Gleichungssystems in ihre Normalformen um. Entscheide anhand der Geradengleichungen, wie viele Lösungen das Gleichungssystem hat. Gibt es eine Lösung, so bestimme diese graphisch.

a) $2y-6x=-10$ $y+x=7$	b) $3y+6x=-12$ $2y-10=2x$	c) $4y-2x=16$ $2y+x=4$	d) $2y-3x=6$ $6y-6=6x$
e) $4y+10=6x$ $3x-2y=5$	f) $5y-2x=5$ $3y+9=6x$	g) $2y+2=2x$ $4-4y=12x$	h) $3y+x=6$ $2x+6y=18$
i) $3y-x=6$ $2y+4=6x$	k) $7y-2x=28$ $7y+2x=14$	l) $x-3y=12$ $-y-x=-2$	m) $2x+3y=6$ $18-9y=6x$

Lösungen (ungeordnet): $(3|4)$ $(-2|3)$ $(0{,}5|-0{,}5)$ $(-3|2)$ $(4{,}5|-2{,}5)$ $(1{,}5|2{,}5)$ $(-3{,}5|3)$ $(-4|-3)$ $(2{,}5|2)$

Abbildung 6.12


1) $\frac{7}{17}x - 7{,}320\,y = \frac{312}{8}$

$\sqrt{\frac{8}{3}}\,x + 2{,}33332 = 17^2 y$

2) $19{,}9^3 x = 100 - y$

$2001 - \frac{5}{6}x = 1{,}01$

3) $5(x - 3{,}4y) = 7{,}3$

$8x + 8y = \frac{8}{3}$

4) $-\frac{2\,8^3}{3343}x - \sqrt{8}\,y = 17{,}3$

$225x + 5.000.000\,y = x + x + 3$

Abbildung 6.13

Als Ergebnis der Beobachtungen kann festgehalten werden, dass Schüler je nach Aufgabenstellung unterschiedlich reagierten bzw, variierten.

- Lag eine wenig differenzierte Startaufgabe vor, so variierten sie vermehrt mit der Analogisieren-Strategie.

- Bei einer engen Aufgabenstellung variierten sie eher mit der Trivial-Strategie.

Die Analogisieren-Strategie innerhalb algebraischer Aufgaben: Betrachtet man die Variationen innerhalb der algebraischen Aufgaben, also innerhalb der Termberechnungen und Gleichungstermberechnungen, so wandten die Schüler am häufigsten die Analogisieren-Strategie an.

- Die Auswertungen zeigen auf, dass Schüler beim Variieren bekanntes Wissen über gelernte Algebrastrukturen gezielt anwandten: Zahlbereichserweiterungen, Vorzeichenänderungen, höhere Exponenten, größere Variablenanzahlen, Aufgabenverlängerungen als Kettenaufgaben, Einbeziehen binomischer Terme.

[2] EdN(2)

[2] EDN: Beispiele über Algebrastrukturen:

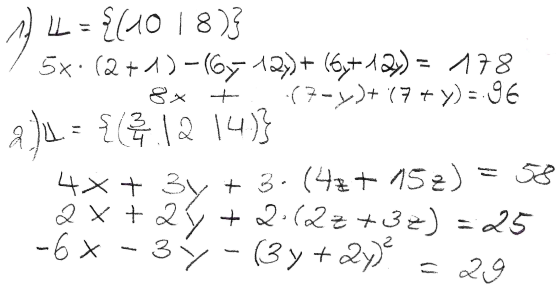


Abbildung 6.14

Zum Taschenrechnergebrauch: Die Anwendungen beim Satz des Pythagoras und anderer mathematischer Inhalte machen den Einsatz des Taschenrechners nötig. Kommende Beispiele lassen einige Folgerungen zu den Aufgabenvariationen zu:

EdN(3) [3]

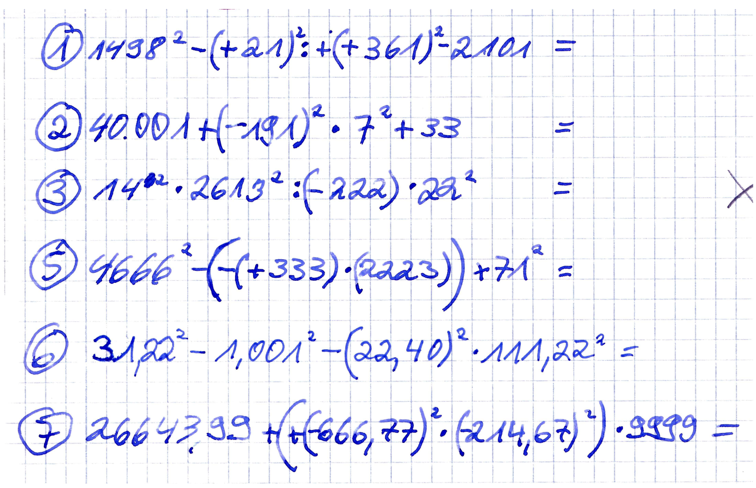


Abbildung 6.15

Konsequenzen aus den Beobachtungen zum Taschenrechnergebrauch: Die Auswertungen der Variationen zeigen auf, dass Schüler

- wesentlich ideenreicher und vorbehaltloser Mathematikaufgaben kreierten als Schulbuchautoren selbst.

[3] EdN: Beispiele über TR-Gebrauch:

- eher die Scheu verloren zu variieren, da sie die Möglichkeiten des Taschenrechners als eine Unterstützung einsetzen.

6.4 Qualitative Variationsmessungen bei Aufgaben mit Zeichnungen oder Tabellen

6.4.1 Qualitative Beurteilungen

Für die 12. Aufgabenvariation, die hier als 5. Startaufgabe ausgewiesen wurde bei Aufgaben mit Zeichnungen und Tabellen, erfolgen zunächst exemplarisch fachdidaktische Aspekte möglicher Variationsrichtungen:

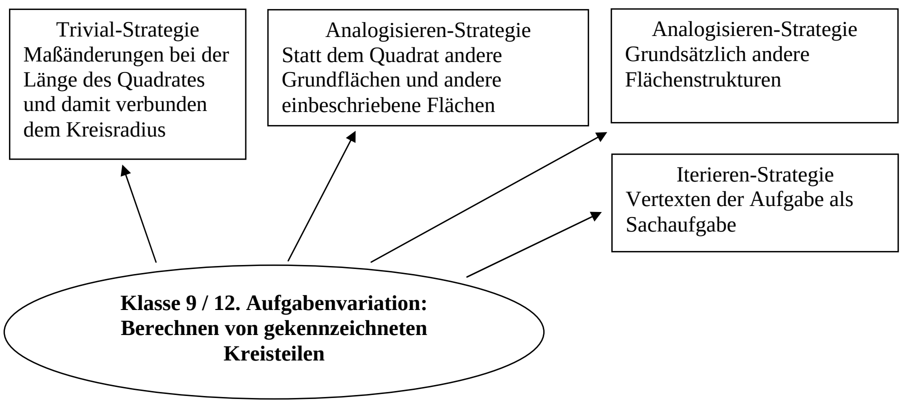


Abbildung 6.16

Lediglich bei der Variationsrichtung des Iterierens, des Weitermachens hier im Sinne einer Vertextung der Aufgabe, zeigten sich in den Variationen der Schülerinnen und Schüler Lücken. Dabei ist es interessant, dass Schupp selber (vgl. Kap. 3.3) solche Variationen auch nicht in Erwägung gezogen hatte.

Tabelle: 6.5:

Startaufgaben	Variationsrichtungen	Anzahlen der Var.	Angewandte Strategien

1) Berechnen der Dachsparrenlänge bei angegebener quadratischer Grundseite und Höhe (Körperhöhe) des Daches (quadra-tische Pyramide).	Statt Grundseite und Körperhöhen werden Seitenkanten, Seitenhöhe und Grundflächendiagonalen angeben	11	Einfaches Analogisieren
	Wie 1. Var. Rtg., aber mit Zeichnungen	5	Analog.-Strat.
	Wie 1. Var.-Rtg., aber mit Aufgabentexten	2	Frageverbes-sern-Strat.
2) Bestimmen der fehlenden Größen eines Würfels mit Hilfe einer einzigen gegebenen Größe	Andere Größenangaben, mit und ohne Tabelle	13	Trivial-Strat.
	Andere Größenangaben, aber mit Zeichnung und Aufgabentext	2	Strat.-Komb. (Zeichnung und Vertextung)
	Größenangabe als Aufgabe angegeben	1	Frageverbessern-Strat.
3) Berechnen von Umfang und Flächeninhalt eines gleichschenkligen Trapezes bei drei angegebenen Teilen	Zeichnungen mit anderen Längenangaben	2	Trivial-Strat.
	Zeichnungen mit Angaben für ein ungleichschenkliges Trapez	5	Analog.-Strat.
	Zeichnungen mit Bezug auf Flächendiagonalen	2	Analog.-Strat.
	Zeichnungen mit Aufgaben zur Berechnung der Seitenlängen	1	Start.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
4) Zeichnen des Graphen einer verschobenen Normalparabel bei angegebenem Funktionsterm	Geringfügiges Ändern der Parameter	4	Trivial-Strat.
	Negatives Vorzeichen dem x-Wert gegeben	13	Einfaches Analogisieren
	Die Quadrate in den Funktionstermen durch höhere Potenzen ersetzt	10	Analog.-Strat.
	Zeichnungen mit verschobener Normalparabel vorgegeben und nach dem Funktionsterm gefragt	3	Frageumkehren-Strat.
5) Berechnen von gekennzeichneten Kreisteilen in einem Quadrat oder Kreis	Zeichnungen mit nur anderen Längenangaben	4	Trivial-Strat.
	Zeichnungen mit anderen Flächenstrukturen bei Kreisen und Quadraten	12	Analog.-Strat.
	Zeichnungen mit grundsätzlich anderen Flächenstrukturen	6	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
6) Berechnen von Volumina und Massen zusam-mengesetzter Zylinder	Zeichnungen mit nur anderen Maßangaben	8	Trivial-Strat.
	Zeichnungen mit anderen Zylinderkombinationen	10	Analog.-Strat.
	Zeichnungen mit anderen Körpern	3	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)

7) Berechnen von Volumina und Massen zusammengesetzter Körper	Zeichnungen mit nur anderen Maßangaben	9	Trivial-Strat.
	Zeichnungen mit anderen Körperkombinationen	6	Analog.-Strat.
	Zeichnungen mit spitzzulaufenden Körpern	10	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Körpervolumina gegeben, Seitenlängen gefragt	3	Frageumkehren-Strat.
	Mit Hilfe einer Zeichnung und einem Text die Frage verändert	6	Frageverbessern-Strat.
8) Konstruieren der zentrischen Streckung von einem Quadrat, Rechteck oder Dreieck bei gegebenem Zentrum und/oder Bildpunkt	Ein Kreuz, einen Stern, zwei Flaggen als 2-dimensionale Figuren zum zentrischen Strecken aufgegeben	4	Trivial-Strat.
	3-dimensionale Figuren zum Strecken aufgegeben: • Buchstaben • Pyramiden • Ziffern • Andere	15	Analog.-Strat.
	Streckfaktoren als Aufgabe zum Ausrechnen aufgegeben mit 2. Var.-Rtg.	4	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Mehrfaches Hintereinanderaus- führen von Streckungen mit 2. Var.-Rtg.	7	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Die Ziffern der dreidimensionalen Zahl „71“ unter-schiedlich vergrößern und dann gleichartig verkleinern	1	Frageverbessern-Strat.

6.4.2 Die Strategieübersicht als quantitative Beurteilung

Summiert man hier die einzelnen Strategien, so stellt man eine leichte Verringerung im Vergleich zu den algebraischen Aufgaben fest:

Tabelle: 6.6:

Start-aufgabe	Trivial-Strat.	einfaches Analogisieren	Analog.-Strat.	Strat.-Komb.	Frageum-kehren-Strat.	Fragever-bessern-Strat.	Aufgabe mit Lösung
abgegeben 1.	-	11	5	-	-	2	2
2.	13	-	-	2	-	1	-
3.	2	-	7	1	-	-	-
4.	4	13	10	-	3	-	1
5.	4	-	12	6	-	-	1

6.	8	-	10	3	-	-	2
7.	9	-	6	10	3	6	7
8.	4	-	15	11	-	1	9

6.4.3 Die Auswertungen der Messergebnisse bei den Variationen der geometrischen Startaufgaben

Die Variationen der geometrischen Startaufgaben wurden von den SchülerInnen fast ausschließlich mit einer Zeichnung oder einer Tabelle durchgeführt. Dabei fanden gelernte geometrische Grundmuster ihre Anwendung. Sie variierten bevorzugt Seitenangaben, Größen und textliche Angaben ebenso wie Symmetrie- und Dimensionsangaben, wie die Beispiele zeigen.

EdN(4) [4]

4. Übertrage die Figur in dein Heft und strecke sie von Z aus mit dem angegebenen Streckungsfaktor.

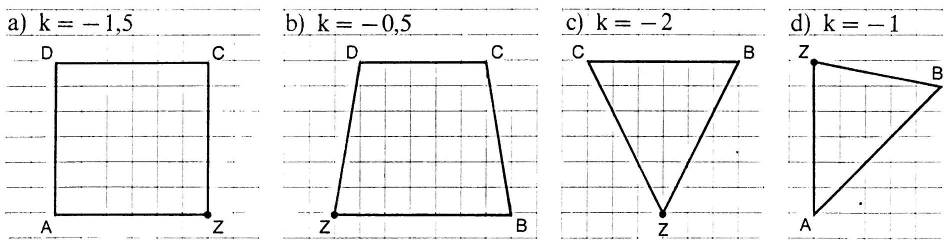


Abbildung 6.17

[4]EdN: Beispiele geometrischer Variationen (mit Symmetrie- und Dimensionswechsel): Kreis und zentr. Streckung, jeweils mit Startaufgabe

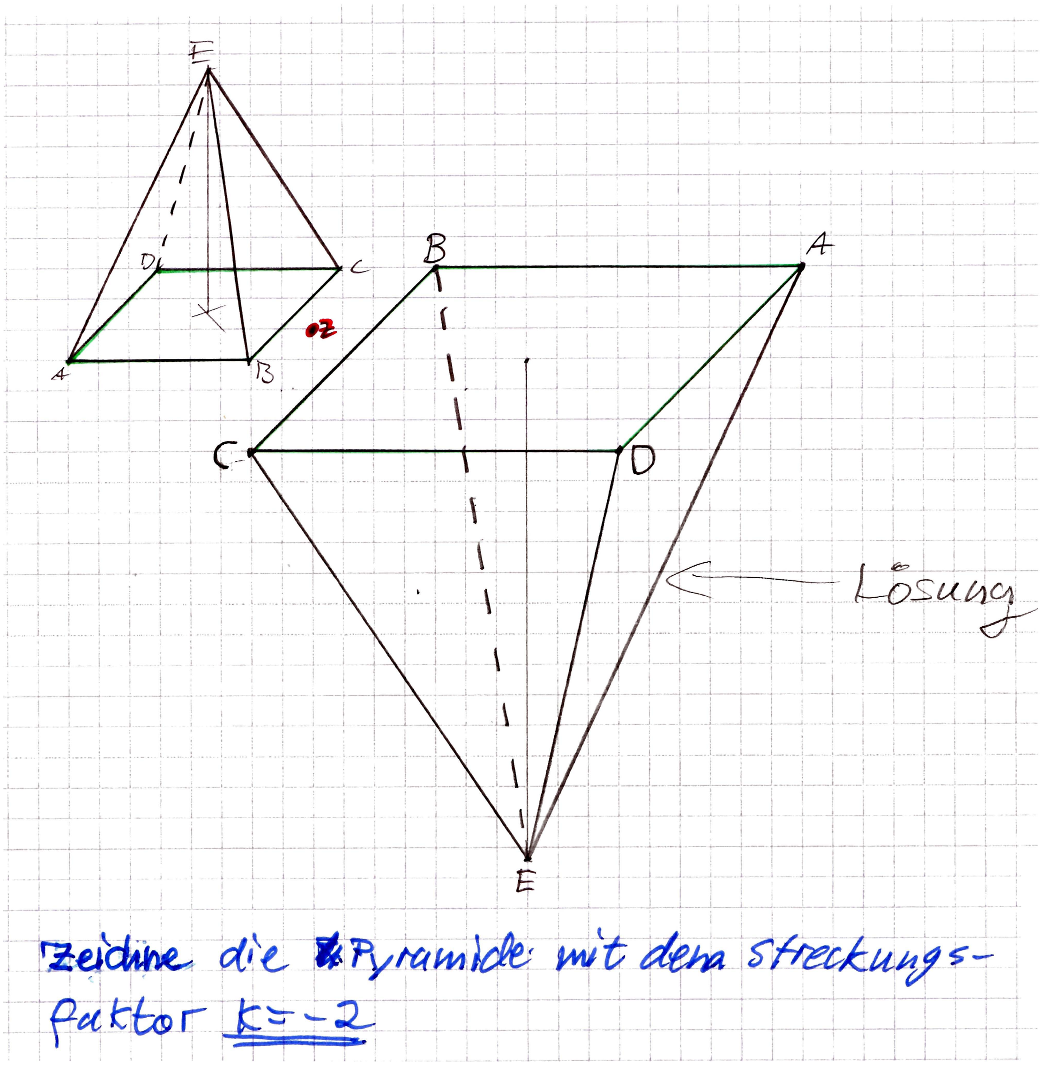


Abbildung 6.18

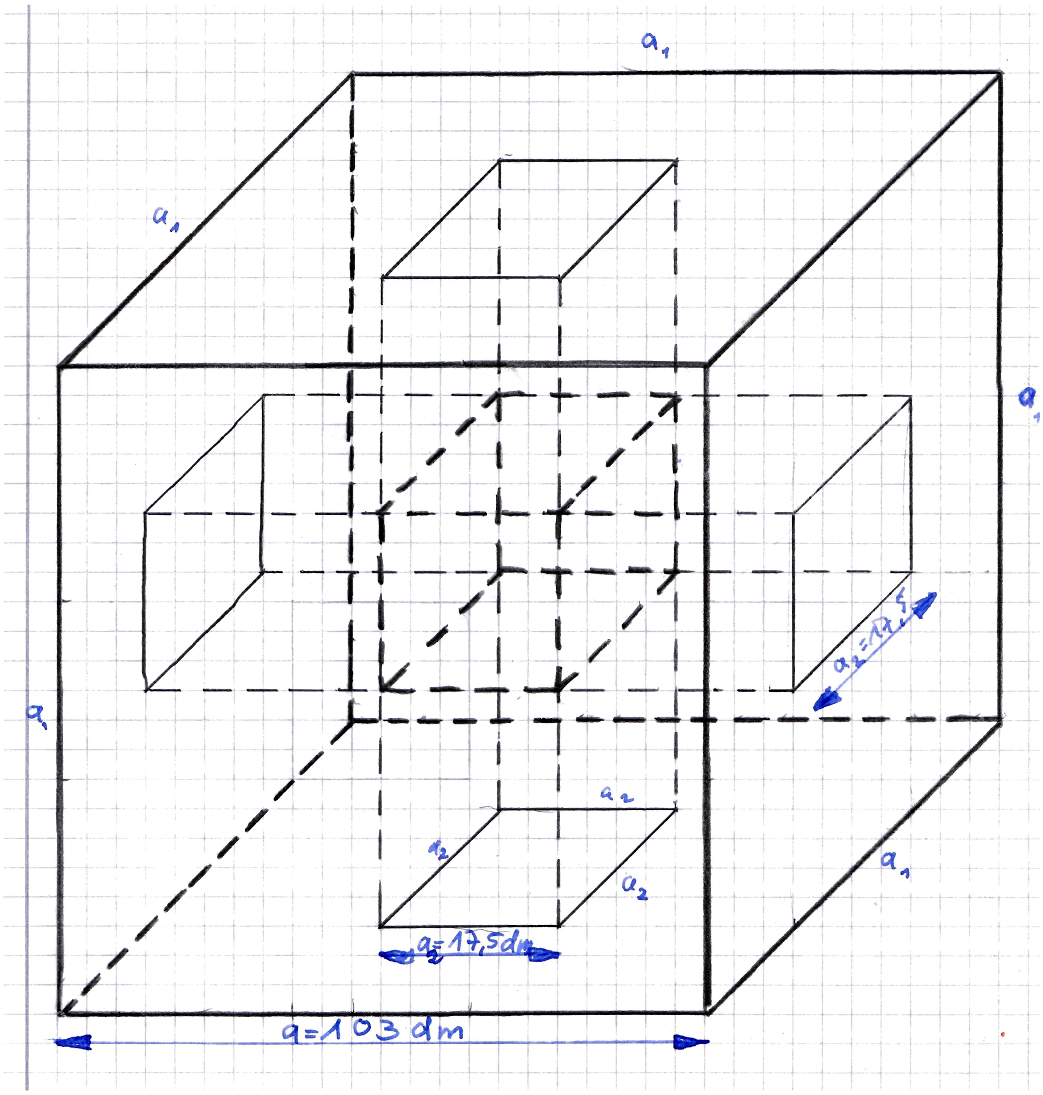


Abbildung 6.19

Analyse der Aufgabenvariationen: Wie die quantitativen Beurteilungen (vgl. Kap. 6.3.3 und 6.4.2) zeigen, wurden bei den Variationen der geometrischen Aufgaben

- auch die Analogisierungs-Strategie und Strategie-Kombinationen verwandt. Diese beiden Variationsrichtungen traten im Vergleich zu den algebraischen Aufgaben in einem geringeren Umfang auf. Beurteilt man die Variationen hinsichtlich ihrer Ausführlichkeit und ihres Inhalts, so sind

- qualitative Zunahmen feststellbar.

Das Beispiel zeigt exemplarisch auf, wie Schüler beim Variieren einer Startaufgabe modellieren. Dieses Muster setzt sich bei allen Variationen geometrischer Startaufgaben fort (vgl. Kap. 6.4.1). Daher kann festgestellt werden:

- Schüler modellieren die Zeichnung einer Startaufgabe unter Verwendung gelernter geometrischer Grundmuster.

6.5 Qualitative Variationsmessungen bei Textaufgaben

6.5.1 Qualitative Beurteilungen

Die 19. Aufgabenvariation, nachfolgend als 4. Startaufgabe ausgewiesen, bestand aus Textaufgaben mit Zahlenrätseln, Altersangaben oder geometrischen Inhalten. Dazu erfolgen exemplarisch zuvor einige fachdidaktische Aspekte möglicher Variationen:

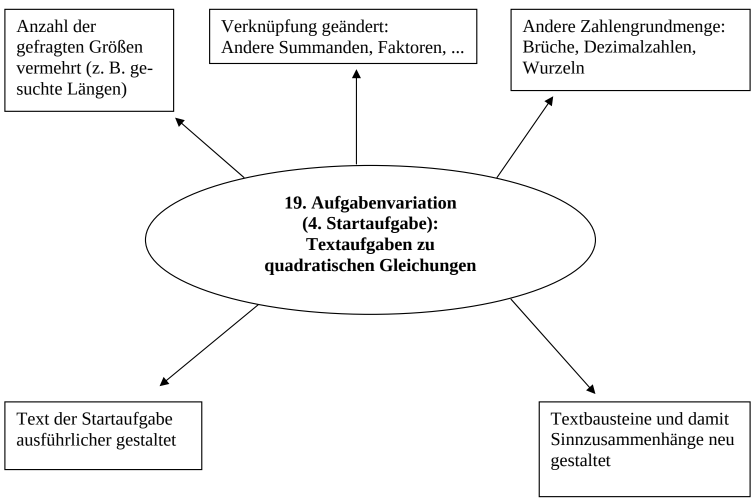


Abbildung 6.20

Die von den Schülerinnen und Schülern entworfenen Aufgabenvariationen zu den Textaufgaben quadratischer Gleichungen deckten im Wesentlichen die möglichen fachdidaktischen Aspekte ab. Die Lerngruppen bediente sich (siehe 4. Startaufgabe) aller möglicher Richtungen, in denen Variationen denkbar wären. Die Schüler zeigten sich allerdings eher motiviert, Zahlen- und Altersrätsel zu variieren als geometrische Inhalte.

Tabelle: 6.7:

Startaufgaben	Variationsrichtungen	Anzahlen der Var.	Angewandte Strategien
1) Lösen einer Textaufgabe zu einer quadratischen Gleichung aus dem Bereich Zahlenrätsel, Altersrätsel oder geometrie	Koeffitienten, Satzteile oder Rechenoperationen in Zahlenrätsel ausgetauscht	13	Trivial-Strat.
	Wie in der 1. Var.-Rtg., aber bei Altersrätsel	3	Trivial-Strat.
	Wurzelgleichungen und kubische Gleichungen bei Zahlenrätsel	4	Analog.-Strat.
	Zahlenrätsel mit binomischem Ausdruck entworfen	1	Analog.-Strat.
	Zahlenrätsel als Ungleichung entworfen	1	Analog.-Strat.
2) Berechnungen an Kreisen bei Uhrzeigern, Planetenbahnen, Trinkbechern, Reifen	Radius oder Durchmesser eines Objekts gegeben, Umfang gefragt	5	Trivial-Strat.
	Umfang eines Objekts gegeben, Radius gefragt	5	Trivial-Strat.
	Umfänge und Verbindungslinien gesucht	2	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Teilfläche eines Kreises gesucht ohne einbeschriebenes Quadrat	1	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Kreisring gesucht	1	Frageverbessern-Strat.
3) Aufgaben zum Trainieren von Berufs-einstellungstests	Im Text natürliche Zahlen als Anzahlen für verschiedene Objekte benutzt	8	Trivial-Strat.
	Im Text Umrechnungen für Objektanzahlen benutzt	4	Analog.-Strat.
	Im Text Bruch- und Dezimalzahlen für Objekte benutzt	3	Analog.-Strat.
	Im Text dreifachen Dreisatz benutzt	1	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Im Text an die erste Aufgabe eine Anschlussaufgabe gestellt	1	Frageverbessern-Strat.

4) Zahlenrätsel- oder Altersrätsel-aufgaben	Im Text nur andere Summanden oder Faktoren verwandt	3	Trivial-Strat.
	Im Text auch • Brüche, • Dezimalzahlen, • Nachfolger, • Quotienten und • Potenzen eingebaut.	12	Analog.-Strat.
	Im Text Potenzen, Wurzeln und Quotienten zusammen verwandt	5	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Im Text mit 3 Variablen gearbeitet	1	Frageverbessern-Strat.
	Text mit einfachen Alters-rätseln entworfen	2	Trivial-Strat.
5) Wirtschaftsauf-gaben	In vergleichbaren Textinhalten nur andere Größen verwandt	7	Trivial-Strat.
	Neue Texte mit neuen Größen erarbeitet	1	Analog.-Strat.
	Im Text mit drei Variablen gearbeitet	3	Frageverbessern-Strat.
	Im Text mit nur einer Variablen gearbeitet	9	Trivial-Strat.

6.5.2 Die Strategieübersicht als quantitative Beurteilung

Auch bei den Textaufgaben sind weniger die quantitativen Zunahmen auffällig als vielmehr die qualitativen Steigerungen der entworfenen Texte, die wir als Variationen ansehen.

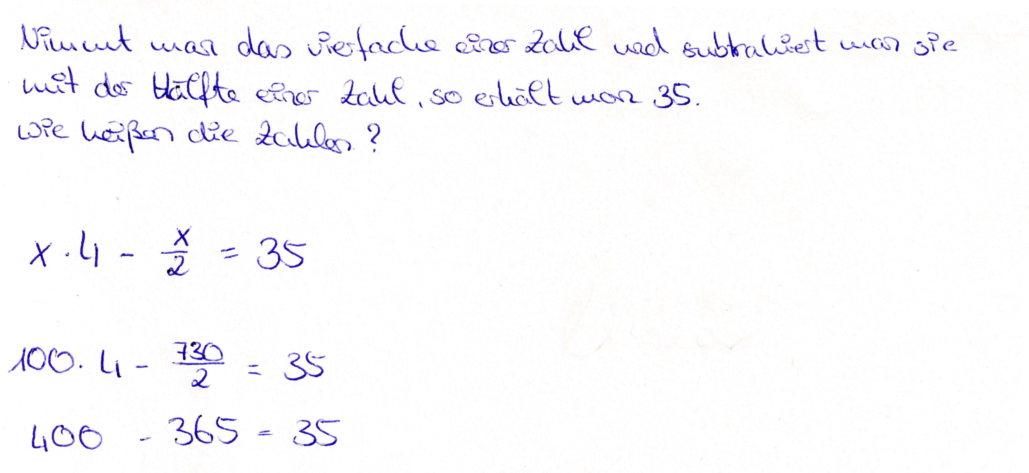
Tabelle: 6.8:

Start-aufgabe	Trivial-Strat.	einfaches Analogi-sieren	Analog.-Strat.	Strat.-Komb.	Frage-umkehren-Strat.	Frage-verbessern-Strat.	Aufgabe mit Lösung abgegeben
1.	16	-	6	-	-	-	2
2.	10	-	-	3	-	1	2
3.	8	-	7	1	-	1	1
4.	5	-	12	5	-	1	2
5.	16	-	1	-	-	3	3

6.5.3 Die Auswertungen der Messergebnisse bei den Variationen von Textaufgaben

Variationen von Textaufgaben bzw. das selbstständige und damit neue Vertexten eigener Variationen verbesserten sich qualitativ im Laufe eines Schuljahres. Das erste Beispiel ist einer Textaufgabenvariationen vom Schuljahresbeginn entnommen. Exemplarisch zeigt es Strategieanwendungen aus der Anfangszeit des Variierens. Die zweite Aufgabenvariation stammt von der gleichen Schülerin und wurde gegen Ende der Klasse 9 bearbeitet.

EdN(5) [5]


Nimmt man das Vierfache einer Zahl und subtrahiert man sie mit der Hälfte einer Zahl, so erhält man 35.
Wie heißen die Zahlen?

$$x \cdot 4 - \frac{x}{2} = 35$$

$$100 \cdot 4 - \frac{730}{2} = 35$$

$$400 - 365 = 35$$

Abbildung 6.21

[5] EdN: 2 Beispiele von einer Schülerin aus der ersten und letzten Textvariationsphase

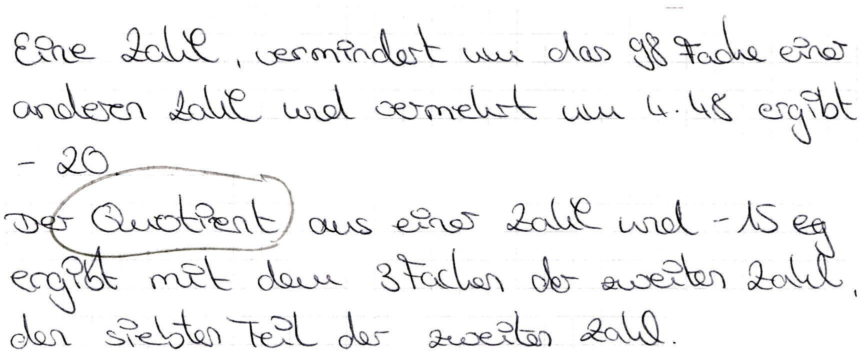

Eine Zahl, vermindert um das 98 Fache einer anderen Zahl und vermehrt um 4·48 ergibt - 20.
Der Quotient aus einer Zahl und - 15 eg ergibt mit dem 3Fachen der zweiten Zahl, den siebten Teil der zweiten Zahl.

Abbildung 6.22

Zusammenfassend kann ausgewertet werden, dass SchülerInnen im Laufe eines Schuljahres

- Texte als Variationen zunehmend ausführlicher gestalteten,
- dabei verstärkt die Analogisieren-Strategie verwandten und
- zusätzliche Fragen einbauten.

6.6 Die Reflexionsphasen

Der Einstieg in die Reflexionsphase begann mit einer lehrerseitig ausgewählten Aufgabenvariation (vgl. Kap. 5.6), die die Schülern als Kopie oder über Folie und OHP vorgestellt bekamen. Es wurden Variationen gezeigt, die die Lerngruppe mit unterschiedlichen Strategien bearbeitet hatte. Dabei verfolgte diese Unterrichtsphase mehrere Ziele:

- Erkennen und Definieren der angewandten Strategie(n).
- Nennen alternativer Variationsmöglichkeiten.
- Fördern einer mathematischen Gesprächskultur im Sinne von fachlichen Diskussionen.

[6] EdN(6)

[6] EdN: Beispiel einer Aufgabe, über die diskutiert wurde mit Diskussionsergebnissen

$$2.)\ \left(\frac{7}{3}\cdot\sqrt{\frac{6}{4}}+\sqrt{\frac{8}{9}}\right)^2=$$

Abbildung 6.23

Im Ergebnis bezogen sich die Diskussionsbeiträge entsprechend der Aufgabenkategorien auf die

- die Variationsmöglichkeiten bei Aufgaben mit algebraischen Termen.
- die Visualisierungs- und Zeichenmöglichkeiten in einer geometrischen Aufgabe.
- Möglichkeiten beim Taschenrechnergebrauch.

Der Einsatz des Taschenrechners und die damit verbundenen Rechenmöglichkeiten bedingten eine sich mehr und mehr entwickelnde neue „Aufgaben-Lösungskultur“. Die Schüler entdeckten einen besonderen Reiz darin, in der Phase des gemeinschaftlichen Besprechens der exemplarisch vorgestellten Variationen nicht nur die Strategiedefinition(en) vorzunehmen, sondern auch die Aufgaben noch einmal dahingehend (mündlich) zu verändern/variieren (siehe auch Kap. 3.3.13), dass sie schließlich trotz Taschenrechnermöglichkeiten - unlösbar- wurden.

EdN(7) [7]

[7] EdN: Beispiel einer Aufgabenvariation mit einer unlösbar gewordenen Aufgabe

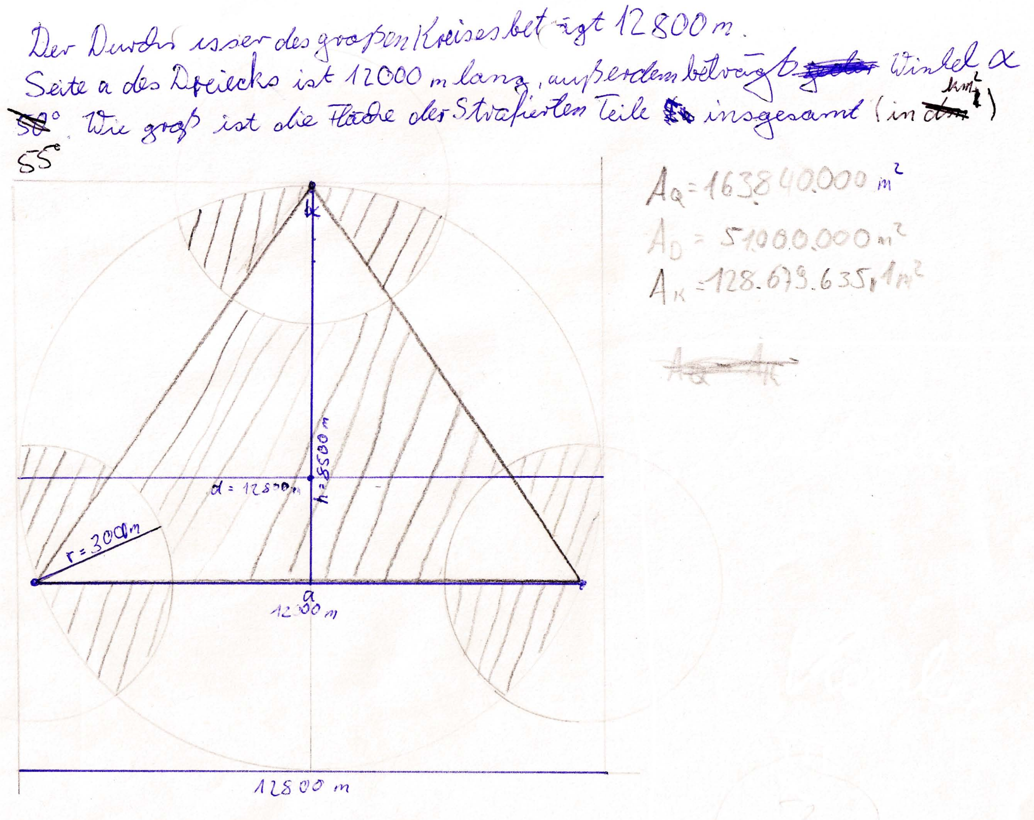


Abbildung 6.24

Sie wandten in diesen Phasen der Klassenverbandsreflexion und -diskussion Strategien an, die sie in ihren eigenen Variationen nicht gebraucht hatten und auch in den nachfolgenden Aufgabenvariationen weiterhin nicht einsetzten:

- Das Verallgemeinern (Kap. 3.3.2)
- Das Abändern des Schwierigkeitsgrades (Kap. 3.3.6)
- Das Spezialisieren (Kap. 3.3.8)
- Das Ändern des Kontextes (Kap. 3.3.10)

6.7 Aufgabenvariationen in Klassenarbeiten

In der 9. Klasse wurde bei 4 Klassenarbeiten jeweils eine zusätzliche Aufgabe eingebaut. Die Aufgabe beinhaltete den Hinweis, eine bestimmte Klassenarbeitsaufgaben zu variieren und die Variation, wenn möglich, auch zu berechnen (siehe Kap. 4.11 und 5.8). Nachfolgend die Original-Klassenarbeit, die Schülervariationen sind dem Anhang zu entnehmen.

EdN(8) [8]

[8] EdN: Beispiele: Klassenarbeitsaufgabe und eine variierte Aufgabe mit Lösung

Klassenarbeit Nr. 2

Gruppe A

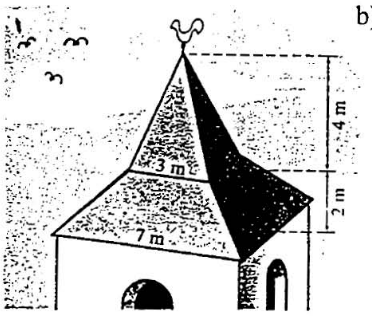
1) Logarithmen:
   a) $\log_2 0{,}25$
   b) $\log_2 256$
   c) $\log_{10} 0{,}01$
   d) $\log_{0,1} 1000$
   e) $\log_{½} 1/16$
   f) $\log_2 \sqrt[3]{8}$

2) Berechne die fehlenden Größen: Kugel

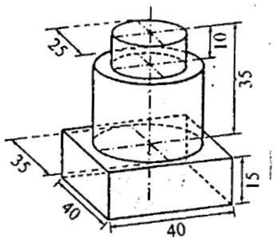
	A	B	C
Radius			
Durchmesser	17 cm		
Volumen		$6{,}8\ m^3$	
Oberfläche			$14{,}3\ dm^2$

3) Bestimme die Volumina der zusammengesetzten Körper:

a)

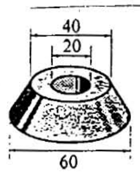


b)



cm

c) In der Mitte dieses Körpers wurde eine Röhre gebohrt - Höhe 10 cm.



4) Aus einem Würfel mit der Kantenlänge 1 m soll ein Pyramidenstumpf gearbeitet werden mit gleicher unterer Kantenlänge.
   Die obere Kantenlänge des Pyramidenstumpfes beträgt 20 cm.
   Wie viel cm^3 Abfall hat man?

5) Wie schwer ist eine Hohlkugel aus Messing (Dichte $8{,}5\ g/cm^3$), deren äußerer Durchmesser 6,2 cm beträgt und die eine Wandstärke von 1,2 cm hat?

6) Wiederholungsaufgaben:
   a) 7 1/2 – 3 2/3 = (ausführlich)
   b) 0,435 = (Bruch)
   c) 2,5x + 13 = 48   x = ?
   d) 7 Arbeiter benötigen für den Abschluss einer Baustelle 24 Stunden.
      Wie viel Stunden würde es dauern, wenn nur 3 Arbeiter eingesetzt sind?

7) Erstelle eine Aufgabenvariation zur Aufgabe Nr. 3

Abbildung 6.25

6.7.1 Strategieübersicht mit prozentualen Häufigkeiten

Auch in den Aufgabenvariationen der Klassenarbeiten ergab sich eine ähnliche Entwicklung wie im gesamten Schuljahresverlauf: Die Schüler wandten die Trivial-Strategie immer weniger an, wo hingegen sie die Strategie-Kombinationen vermehrt einsetzten.

Tabelle: 6.9:

Klassenarbeit	Trivial-Strategie	Analogisieren-Strat.	Strategie-Komb.
Nr. 1 (1. Halbjahr)	43 %	46,5 %	10,5 %
Nr. 2 (1. Halbjahr)	59 %	22,5 %	18,5 %
Nr. 3 (2. Halbjahr)	50 %	30,5 %	19,5 %
Nr. 4 (2. Halbjahr)	30 %	30,0 %	30,0 %

6.7.2 Interpretation der gemessenen Häufigkeiten

Es kann festgehalten werden, dass

- die im Unterricht angewandten Strategien auch in den Variationen von Klassenarbeitsaufgaben benutzt wurden.

Außerdem äußerten die Schüler, dass sich der Zeitdruck bei Klassenarbeiten hemmend auf die Ausgestaltung der Variationen auswirkt.

Diese eher banale Feststellung ist mit ein Grund dafür, dass kaum Lösungen der eigenen Variationen abgegeben wurden.

6.8 Zusammenfassung der Ergebnisse

6.8.1 Öffnung auf verschiedenen Ebenen

Die Aufgabenvariationen gaben den Schülern des Gesamtschuljahrgangs 9 E-Kurs die Möglichkeit, Offenheit für das Fach Mathematik auf verschiedenen Ebenen hinzu zu gewinnen:

Ebene 1: Methoden-Öffnung

- Die Schüler benutzten das Variieren der Aufgaben als ein mathematisches Instrument.

- Sie benutzten vermehrt die Analogisieren-Strategie und setzten diese besonders bei algebraischen Aufgaben ein.
- Sie modellierten bei geometrischen Aufgaben verstärkt mit eigenen Zeichnungen.

Ebene 2: Sicht-Öffnung

- Die Schüler erweiterten ihr Bild von Mathematik und vermehrten ihr Interesse.
- Sie führten verstärkt Strategie-Kombinationen durch.
- Bei wenig differenzierten Startaufgaben zeigten sie eine hohe Variationsbereitschaft.
- Sie erstellten bei zu variierenden Textaufgaben als Variationen eigene Texte, die zunehmend ausführlicher und mit eigenen Fragen ergänzt wurden.

Ebene 3: Mathematik-Öffnungen

- Die Schüler erarbeiteten sich einen Zugang zu weiteren Stoffaspekten
- Sie setzten den Taschenrechner ein, um ihre Variationen im Ergebnis weiter zu verfolgen.
- Bei den Diskussionen von Aufgabenvariationen innerhalb des Klassenverbandes entdeckten sie noch weitere Variationsmöglichkeiten.

6.8.2 Die Kompetenzforderungen in Verbindung zu den Öffnungs-Ebenen

Die Kompetenzforderungen in Gegenüberstellung zu den „Öffnungsebenen“

Die folgende Abbildung zeigt die Gegenüberstellung einiger Kompetenzforderungen (Kap. 1) im Hinblick auf die Ebenen, in denen sich Schüler für das Fach Mathematik öffnen (vgl. Kap. 6.8.1). Forderungen, von z. B. „mathematical literacy“ und „Freudenthal“, korrespondieren mit . „Methoden -, Sicht - und Mathematik - Öffnungen“, die durch Aufgabenvariationen erreicht werden können:

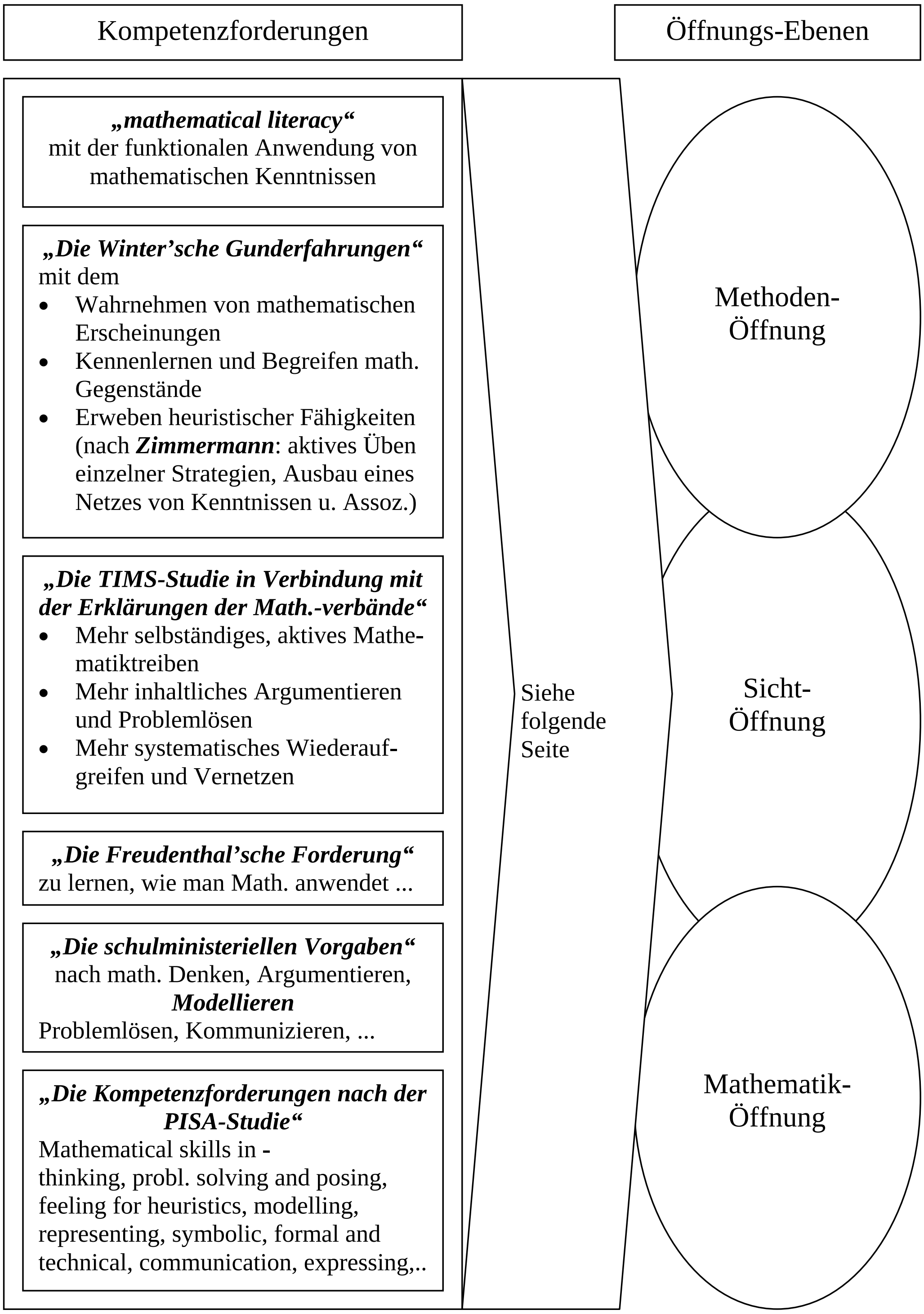


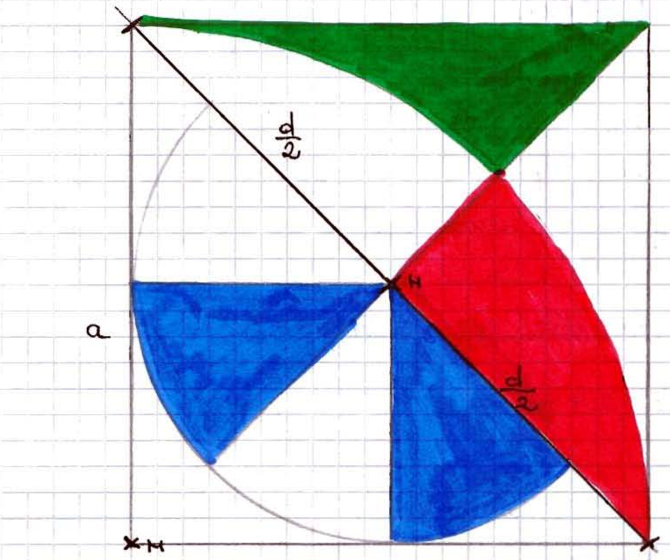
Abbildung 6.26

In der Variationstätigkeit selbst und in den damit verbundenen Entscheidungen eines Schülers für eine Strategie wurden heuristische Übungen durchgeführt, wie sie der Schulunterricht nicht unbedingt kennt. Im Gegensatz zu häufig in Mathematikbüchern abgedruckten Übungsaufgaben konnten die Schüler mit ihren Variationen eine beachtliche Breite von Aufgaben vorstellen (vgl. Kap. 3.2, 4.1 und 5.1).

Während die TIMS-Studie noch über einen Mangel an selbstständigem Mathematiktreiben klagte und diese Klagen in den Forderungen der Mathematiker-Verbände aufgingen, gaben die Schüler hier mit ihren Strategie-Kombinationen ihrem „Treiben von Mathematik“ Ausdruck.

Den Freudenthal´schen Forderungen (s.o.) kommt die Variation einer Schülerin, die bei der Aufgabe über Kreisteilberechnungen (siehe Kap. 6.4.1 / 4.Startaufgabe) ihr geometrisches Wissen in eine interessante, klug durchdachte Flächenaufgabe fließen ließ:
[9] EdN(9)

[9] EdN: Beispiel dieser Aufgabenvariation



Gegeben → $U_{Quadrat} = 1296$ cm

Berechne die grüne, rote, weiße u. die blaue Fläche!

1

Lösung

$a = 1296\text{ cm} : 4 = 324\text{ cm}$ $\qquad \frac{a}{2} = \frac{324}{2}\text{ cm} = 162\text{ cm}$

$d = \sqrt{a^2 + a^2} = 458{,}2\text{ cm}$

$\frac{d}{2} = 229{,}1\text{cm}$

$A_K = \left(\frac{324}{2}\text{ cm}\right)^2 \cdot \pi = 82448\text{ cm}^2 : 4 = 20612\text{ cm}^2$

$A_K = (324\text{cm})^2 \cdot \pi = 329791{,}8\text{ cm}^2 : 4 = 82448\text{ cm}^2$

$A_{Dreieck} = \frac{324\text{cm} \cdot 324\text{ cm}}{2} = 52488\text{ cm}^2$

$(82448\text{ cm}^2 - 52488\text{ cm}^2) : 2 = 14980\text{ cm}^2$

$\underbrace{(52488\text{ cm}^2 - \underbrace{14980\text{ cm}^2 \cdot 2}_{29960\text{ cm}^2})}_{22528\text{ cm}^2} : 2 = 11264\text{ cm}^2$

$$\begin{array}{r} 20612\text{ cm}^2 \\ + \cancel{82448\text{ cm}^2} \\ + 14980\text{ cm}^2 \\ + 11264\text{ cm}^2 \\ \hline 46856\text{ cm}^2 \end{array}$$

↑ bunte Fläche

$A_{Quadrat} = a^2 = 104976\text{ cm}^2$

$$\begin{array}{r} 104976\text{ cm}^2 \\ - 46856\text{ cm}^2 \\ \hline 58120\text{ cm}^2 \end{array}$$

weiße Fläche 58120 cm^2

Abbildung 6.27

Die Silversche Metapher (vgl. Kap. 2.5.7),

> *that problem-posing tasks can provide researchers with both*
>
> - *a window through which to view students ´mathematical thinking and [. . .]*

fand Anwendung z. B. im schrittweisen Unlösbarmachen einer Aufgabe. Modellierungstätigkeiten dieser Art öffneten dabei den Schülern vermehrt das Verständnis von Variablen und Variablenkombinationen.

Der Erwartungs(aus)druck der PISA-Studie im „feeling for heuristics“ (vgl. 1.5.3) bestätigte sich in den Aufgabenvariationen dahingehend , dass Schüler mehr und mehr ihre Variationen ideenreich erarbeiteten (siehe obiges Beispiel).

In wie weit sich diese Kompetenzen im 10. Schuljahr stabilisierten und welche weiteren Ergebnisse die Betrachtung der Fallstudien hatten, zeigen die folgenden beiden Kapitel.

Kapitel 7

Die Aufgabenvariationen bei den vier Probanden

Vor Beginn dieser Arbeit waren zunächst nur Untersuchungen innerhalb des ganzen Kurses geplant. Vertiefende Überlegungen zum Forschungsdesign ließen den Wunsch aufkommen, einige wenige Schülerinnen und Schüler speziell zu fokussieren. Es bestand die Sorge, etwas bei der Entwicklung der Kompetenzen innerhalb des Klassenverbandes zu übersehen. Die Untersuchungsergebnisse gaben schließlich auch dieser Vermutung recht.

Die „Fallbeispiele der Schülerinnen und Schüler aus den Jahrgangstufen 9 und 10“ (siehe Titel dieser Arbeit) beziehen sich auf die Schülerinnen Anna und Natscha sowie auf die Schüler Enrico und Mirco (vgl. Kap. 4.1.2).

Dieses Kapitel zeigt eine überraschende Entwicklung bei den vier Schülerinnen und Schülern innerhalb ihrer Aufgabenvariationen während des 9. und 10. Schuljahres. Die Erhebungen der angewandten Strategien erfolgten wie in den Kapiteln 6.3, 6.4 und 6.5 beschrieben.

7.1 Die Kompetenzentwicklung der Probanden im 9. Schuljahr

Die in den beiden Schuljahren von den vier Schülerinnen und Schülern variierten Aufgaben waren die gleichen, wie sie die gesamte Lerngruppe erhielt. Es lag lediglich an der offenen Fragestellung, ob durch ein Fokussieren auf einen Teil der Lerngruppe mit unterschiedlichen Mathematiknoten weitere Einsichten in die Wirksamkeit von Aufgabenvariationen gewonnen werden können.

7.1.1 Angewandte Strategien im 9. Schuljahr

Nachstehende Tabelle zeigt die angewandten Strategien innerhalb der Aufgabenvariationen, aufgelistet für jeden der vier Schülerinnen und Schüler:

7.1.2 Analyse und Interpretation

Anna, die Mathematikschülerin der vier Probanden mit den besten Leistungsnoten im Fach Mathematik, wandte nach nur kurzer Einarbeitungszeit sofort Strategie-Kombinationen an. Als Aussiedlerschülerin zeigte sie lediglich beim Vertexten ihrer Variationen sprachliche Zurückhaltung.

Natascha hatte eine höhere sprachliche Kompetenz und tat sich bei der Variation von Textaufgaben weniger schwer. Als gute Mathematikschülerin zeigte sie eine breite Basis von Strategieanwendungen.

Anna und Natascha gaben immer bereitwillig ihre Arbeitsergebnisse ab und versäumten keine Variationsaufgabe.

Fasst man die Beobachtungen zusammen, so kann festgehalten werden, dass die beiden engagierten und erfolgreichen Mathematikschülerinnen

- ein großes Interesse an Aufgabenvariationen zeigten,
- dabei verschiedene Strategien und
- Strategie-Kombinationen anwandten.

Enriko, hinsichtlich seiner Leistungen als befriedigend einzustufen und Mirco, der ausreichende Mathematikleistungen zeigte, entwickelten erst nach einigen Wochen Aufgabenvariationen, die über die Trivial-Strategie hinaus gingen.

Wertet man ihre Variationsergebnisse aus, so ist es auffällig, dass auch sie nach ca. der Hälfte des Schuljahres bzw. nach der Hälfte der abgegebenen Variationen

- kaum noch die Trivial-Strategie anwandten. Sie setzten genau wie die mathematisch erfolgreicheren Mädchen
- verschiedene Strategien und Strategie-Kombinationen ein.

7.2 Die Kompetenzentwicklung der Probanden im 10. Schuljahr

Wir sind in der günstigen Lage, die Probanden aus dem 9. Schuljahr auch im 10. Schuljahr beobachten zu können.

Schulhalbjahr	Anna	Natascha	Enrico	Mirco
1. Woche / Summe von Quadraten	keine Abgabe	Strat.-Komb.	keine Abgabe	keine Abgabe
2. Woche / Binomische Formel	Strat.-Komb.	Iterieren- und Analog.-Strat.	keine Abgabe	keine Abgabe
4. Woche / Def.-mengenbestimmung	Iterieren- und Analog.-Strat.	Trivial-Strat.	Trivial-Strat.	Trivial-Strat.
5. Woche / Dachsparrenlänge	Analog.-Strat.	einfaches Analogisieren	einfaches Analogisieren	keine Abgabe
6. Woche / Würfelgrößen	Strat.-Komb.	Trivial-Strat.	Strat.-Komb.	keine Abgabe
8. Woche / Trapez- fläche u. -umfang	keine Abgabe	keine Abgabe	keine Abgabe	keine Abgabe
12. Woche / Verschieben v. Normalparabeln	Analog.- und Frageumkehren-Strat.	Analog.-Strat.	einfaches Analogisieren	keine Abgabe
15. Woche / Reinquadr. Gleichungen	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.	keine Abgabe
17. Woche / Gemischtquadr. Gleichung	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.	keine Abgabe	Analog.-Strat.
19. Woche /. (Text) Quadr. Gleichungen	Trivial-Strat.	Trivial-Strat.	keine Abgabe	keine Abgabe
20. Woche / Der Kreis	Strat.-Komb.	Umkehren-Strat.	Frageverbessern-Strat.	Analog.-Strat.
21. Woche / Kreisteilberechnungen	Strat.-Komb.	keine Abgabe	Analog.-Strat.	keine Abgabe
22. Woche / Zusammengesetzte Zylind.	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.	Analog.-Strat.	Strat.-Komb.
24. Woche / Zusammengesetzte Körper	Strat.-Komb.	Analog.-Strat.	Strat.-Komb.	Analog.-Strat.
25. Woche / Gl.-system / Gleichsetzungsverfahren	Strat.-Komb.	Start.-Komb.	Blickrichtungänderungs-Strat.	Analog.-Strat.
26. Woche / Zusammengesetzter Dreisatz (Text)	Frageverbessern-Strat.	Trivial-Strat.	Trivial-Strat.	Trivial-Strat.
27. Woche / Gl.-system / Einsetzungsverfahren	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.
29. Woche / Gl.-system / Additionsverfahren	Blickrichtungänderungs-Strat.	Blickrichtungänderungs-Strat.	Trivial-Strat.	keine Abgabe
31. Woche / Gl.-systeme (Text)	Strat.-Komb.	Frageverbessern-Strat.	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.
33. Woche / Gl.-systeme (Text)	Trivial-Strat.	Frageverbessern-Strat.	Frageverbessern-Strat.	keine Abgabe
35. Woche / Fertig-zeichnen v. zentrischen Streckungen	keine Abgabe	Analog.-Strat.	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.

Tabelle 7.1

7.2.1 Angewandte Strategien im 10. Schuljahr

Im 10. Schuljahr bestätigte sich die zu Anfang des Kapitels beschriebene Vermutung, dass eine besondere Fokussierung einzelner Schülerinnen und Schüler weitere Einsichten ergeben würde.

Schulhalbjahr	Anna	Natascha	Enrico	Mirco
2. Woche / Quotient von Potenzen	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.	Trivial-Strat.	Analog.-Strat.
4. Woche / Quotient v. Poten-zen mit Wurzeln	Start.-Komb.	Strat.-Komb.	Analog.-Strat.	Analog.-Strat.
6. Woche / (Text) Kugelaufgabe	Analog.-Strat.	Trivial-Strat.	Analog.-Strat.	Strat.-Komb.
12. Woche / (Text u. Zeichnung) Pyramidenstumpf	Strat.-Komb.	Umkehren-Strat.	Trivial-Strat.	Strat.-Komb.
16. Woche / (Tab. u. Zeichnung) Rechtw. Dreiecke	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.	Analog-Strat.
18. Woche / (Text u. Zeichnung) Rechtw. Dreiecke	Strat.-Komb.	Trivial-Strat.	Trivial-Strat.	Trivial-Strat.
21. Woche / (Text u. Zeichnung) Allg. Dreiecke	Strat.-Komb.	Analog.-Strat.	Frageverbessern-Strat.	Trivial-Strat.
25. Woche / Bruchgleichung	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.	keine Abgabe
35.Woche/ Wurzelgleichung	Strat.-Komb.	Strat.-Komb.	Strat..-Komb.	Analog-Strat.

Tabelle 7.2

7.2.2 Analyse und Interpretation

Summiert man bei den vier Probanden das Anwenden der Analogisieren-Strategien und Strategie-Kombinationen, so stellt man fest:

- Anna gebrauchte diese Strategien ausschließlich. Sie wurde auch im Variieren von Textaufgaben sicherer.

- Natascha setzte bei 6 von den 9 Variationsübungen diese Strategien und Strategie-Kombinationen ein.

- Enriko gab nur drei Aufgabenvariationen ab, in denen er die Trivial-Strategie anwandte.

- Mirco variierte mit diesen Strategien sechsmal.

Die am Ende der 9. Klasse gemachten Beobachtungen (vgl. Kap. 7.1.2) setzten sich somit auch eindrucksvoll im 10. Schuljahr fort.

Nachfolgend einige Beispiele von den Aufgabenvariationen der vier SchülerInnen:

- Anna variierte eine Aufgabe zur Zylindervolumenberechnung (Klasse 9, 22. Schulwoche / Strategie-Kombinationen wurden angewandt):

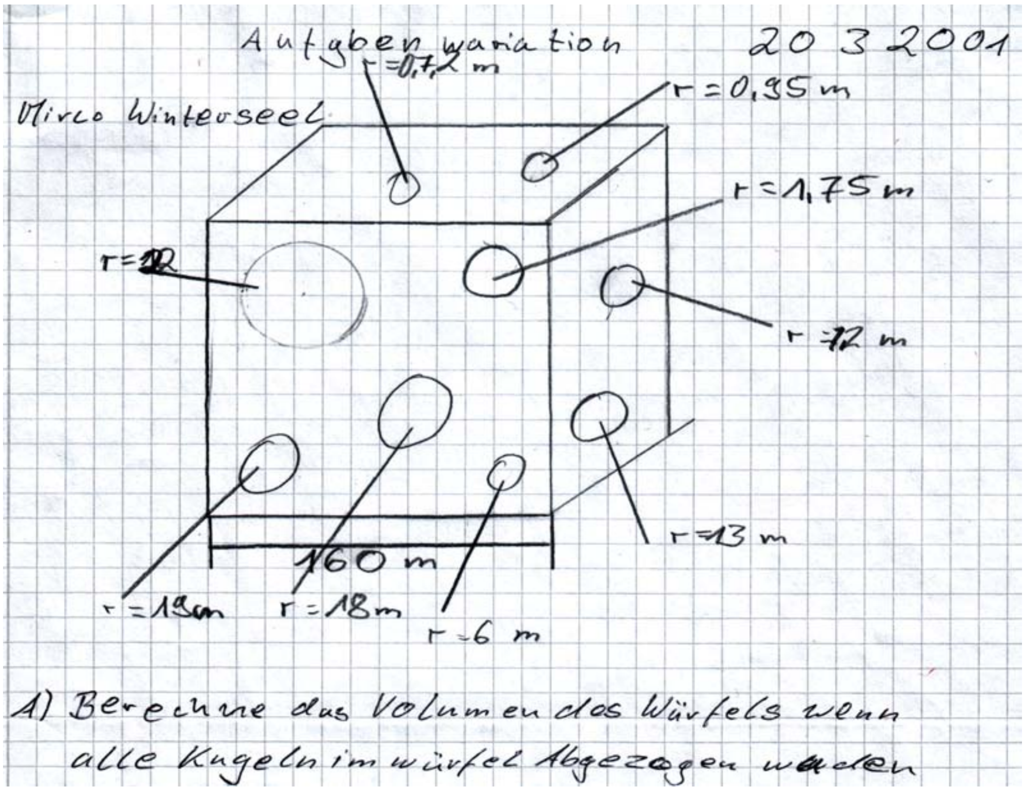


Abbildung 7.1

- Mirco variierte eine Aufgabe zum Kugelvolumen (Klasse 9, 24. Schulwoche / die Analogisieren-Strategie wurde angewandt):

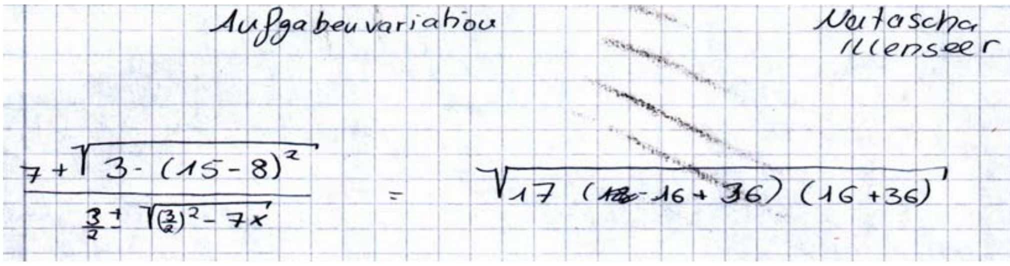


Abbildung 7.2

- Natascha variierte eine Aufgabe zum Thema Wurzelgleichungen (Klasse 10, 35. Schulwoche / sie variierte mit Strategie-Kombinationen):

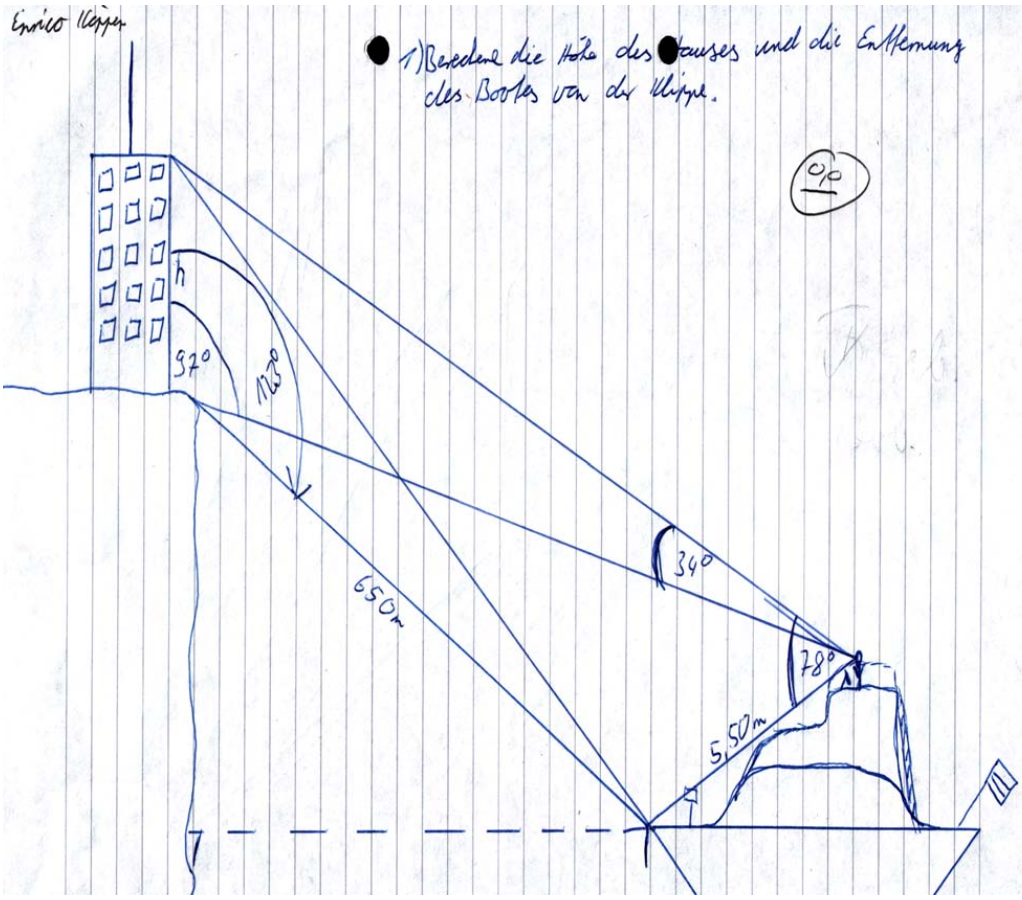


Abbildung 7.3

- Enrico variierte eine Aufgabe über trigonometrische Berechnungen am allgemeinen Dreieck (Klasse 10, 21. Schulwoche / er variierte mit der Strategie des Frageverbesserns):

7.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Es zeigte sich gegen Ende der zwei Unterrichts- und Variationsjahre, dass Annas, Nataschas, Enrikos und Mircos heterogene Mathematikleistungen nur einen geringen Einfluss auf ihre Aufgabenvariationen hatten. In ihren Variationen verwandten sie zunehmend die gleichen Strategien. Je mehr sie sich mit Aufgabenvariationen beschäftigten, desto häufiger kombinierten sie Strategien, wandten also nicht nur eine Strategie an, sondern gleich mehrere. Auch hierbei (vgl. Kap. 8) war deutlich eine quantitative Zunahme erkennbar. Insgesamt gesehen lässt diese Tatsache für die Zukunft hoffen.

Es kann für spätere Untersuchungen die These aufgestellt und erforscht werden, dass nicht primär die individuellen Mathematikleistungen entscheidend für die Varianz der eingesetzten Variationen sind. Vielmehr liegt die Vermutung nahe, dass in einem über die ganze Sekundarstufe I laufenden Mathematikunterricht mit Aufgabenvariationen Schüler mit bestimmten Strategien und ihren Kombinationen mathematische Kompetenzen ausdrücken, üben und verstärken. Dabei müsste ferner untersucht werden, in wie weit der unterrichtende Lehrer mit dem zur Variation vorgegebenen Aufgabentyp noch gezielter lenken und Kompetenzen (unabhängig vom sonstigen Mathematiknotenbild) herausbilden lassen kann.

Kapitel 8

Die Kontrolluntersuchung im 10. Schuljahr

Die Kontrolluntersuchung im 10. Schuljahr hatte vorgängig das Ziel, die Stabilität und die Nachhaltigkeit der in Klasse 9 vermittelten Kompetenzen zu erheben. Dieser Untersuchungszeitraum war hinsichtlich der Unterrichtszeit im Fach Mathematik kürzer als das 9. Schuljahr (vgl. Hinweise im Kap. 6). Daher beschränkte sich die Kontrolluntersuchung auf neun ausgesuchte Aufgaben, die im Laufe des Schuljahres den Schülern zur Variation aufgegeben wurden. Die Aufgabeninhalte repräsentierten wieder die Kategorien aus den algebraischen und geometrischen Themenbereichen in Verbindung mit Zeichnungen und Textaufgaben, wie sie in Klasse 9 thematisiert worden waren (siehe folgende Übersicht).

Dieses Kapitel hatte ursprünglich den Sinn, die Stabilität der im 9. Schuljahr erreichten Kompetenzen zu überprüfen (vgl. Forschungsfragen im Kap. "Übersicht"). Die Problem-Posing-Methode (vgl. Kap. 2.6), methodisch fokussiert und präzisiert in der Variation von Mathematikaufgaben (vgl. Kap. 3), gewährt tiefere Einblicke in die Anwendung von Mathematikkompetenzen. Listet man nun die Daten der 10. Schuljahr-Erhebungen aus den Aufgabenvariationen aus, so sind nicht nur Stabilisierungen von Kompetenzen, sondern auch ihre fortschreitenden Entwicklungen ablesbar. Diese Hypothese, dass selbstständiges und aktives Mathematiktreiben im Sinne des Variierens mathematischer Aufgaben ein z. B. vernetztes Denken und Modellieren (vgl. Kap. 1.6) in Abhängigkeit der Aufgabenkontexte impliziert, soll nachfolgend belegt (Kap. 8.1 und 8.2) und interpretiert (Kap. 8.3) werden.

Schuljahrwoche	Zur Variation bestimmte Aufgabe	Didaktische Einordnung
2. Woche	(S. 32, Nr. 4/5) Quotient von Potenzen z. B. $7^4x^6 : 21^4x^2$	Arbeiten mit Termen
4. (S. 46, Nr. 10)	Quotient von Potenzen mit Wurzeln	Arbeiten mit Termen
6. (S. 124, Nr. 8)	Aus dem Kugelvolumen die Oberfläche bestimmen.	Textaufgabe / Berechnungen an der Kugel
12. (S. 130, Nr. 6)	Materialverbrauch einer Blechwanne mit prozentu-alem Zusatzverbrauch.	Arbeitsanweisung mit Zeichnung / Oberfl. des Kegelstumpfs
16. (S. 79, Nr. 10)	Aus angegebenen Drei-eckstücken sollen die fehlenden Seiten und Winkel bestimmt werden.	Arbeitsanweisung mit Zeichnung und Tabelle / trigonometrische Berechnungen am recht-winkligen Dreieck
18. (S. 89, Nr. 9/10)	Fehlende Dreieckseiten bei verschiedenen Angaben berechnen.	Textaufg. mit Zeichnungen / trigonometrische Berechnungen am recht-winkligen Dreiecken
21. (Arbeitsblatt)	Freie Auswahl einer Textaufgabe zum Thema „Berechnungen im Dreieck“.	Textaufgaben mit und ohne Zeichnungen / Trigonometrische Berechnungen am allgemeinen Dreieck
25. (S. 106, Nr. 3: Buch Kl. 8)	Bestimme die Lösung einer linearen Bruchgleichungen.	Gleichung mit algebraischem Term / Bruchgleichung
35. (S. 151, Nr. 5: Buch Kl. 9)	Bestimme die Lösungsmenge einer Wurzelgleich. z. B. $\sqrt{3x}+6=6-\sqrt{x-1}$	Gleichung mit algebraischem Term / Wurzelgleichung

Tabelle 8.1

8.1 Qualitative Variationsmessungen

Die Schüler verwandten hauptsächlich die Analogisieren-Strategie, oft sogar mehrfach kombiniert. Hinzu kamen weitere Strategien, wie auch „Blickrichtungswechsel“, „Fragen verbessern“, „Kontext- und Schwierigkeitsgradveränderungen“ neben dem zeichnerischen „Visualisieren“. In den Aufgaben aus der 18. und 21. Unterrichtswoche waren die Merkmale der Strategien „Blickrichtungsänderungen“ und „Frageverbesserungen“ deutlicher erkennbar.

Im Folgenden wird auch wie in den Kap. 6 und 7 der Begriff „Variationsrichtung“ verwandt im Sinne der inhaltlichen Ausprägung beobachteter Variationen.

Tabelle: 8.2:

Startaufgaben	Variationsrichtungen	Anzahlen der Var.	Angewandte Strategien
2. Woche: Vereinfachen von algebraischen Quotienten	Einfache Dividenden und Divisoren	4	Trivial-Strat.
	Koeffizienten anderer Grundmengen: Brüche, Dezimalzahlen und irrationale Zahlen	8	Analogisieren-Strat.
	Bruch- und Wurzelexponenten verwandt mit 2. Var.-Rtg.	6	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Negative Exponenten verwandt mit 2. Var.-Rtg.	1	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Variable als Exponenten verwandt mit 2. Var.-Rtg.	1	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
4. Woche: Vereinfachen von algebraischen Wurzel-exponenten	Nur einfache Radikanden verwandt	5	Trivial-Strat.
	Negative und gebrochene Wurzelexponenten, negative Radikanden verwandt	9	Analogisieren-Strat.
	Kettenaufgaben mit Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten mit 2. Var.-Rtg.	12	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
6. Woche: Berechnen der Kugeloberfläche aus einem Kugelvolumen	Texte mit anderen Textbausteinen entworfen	8	Trivial-Strat.
	Texte mit Halbkugel-, Umkehr- und Dichteaufgaben	4	Analogisieren-Strat.
	Texte mit zusätzlichen Berechnungen für weitere geometrische Körper	12	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Text mit Dichteangaben und 3. Var.-Rtg.	1	Strat.-Komb. (Analogisieren und Fragever-bessern)
	Text mit Volumen einer Kugelkappe und 3. Var.-Rtg.	1	Strat.-Komb. (Analogisieren und Fragever-bessern)
12. Woche: Berechnen der Teilflächen eines Pyramiden-stumpfs	Texte mit anderen Textbausteinen, auch zusätzliches Berechnen von Volumina	7	Trivial-Strat.
	Texte mit Dichteangaben und 1. Var.-Rtg.	3	Analogisieren-Strat.
	Texte mit zusätzlichen Körperberechnungen	8	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	BEMERKUNG: Bei den Textanalysen zeigten sich häufig Überschneidungen zu anderen Strategien, die aber nicht eindeutig zu trennen waren		

16. Woche: Berechnungen mit trigonometrischen Formeln von fehlenden Seiten und Winkeln in einem rechtwinkligen Dreieck	Andere Seiten- und Winkelangaben gemacht Durch den Einbezug der Seitenhöhen des Dreiecks nach Teilwinkeln und Seitenstücken gefragt Das rechtwinklige Dreieck zu Berechnungen in andere Flächen einbezogen Texte zu den 2. und 3. Var.-Rtg. entworfen	6 3 7 3	Trivial-Strat. Analogisieren-Strat. Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren) Strat.-Komb. (Analogisieren und Frageverbessern)
18. Woche: Berechnen von trigonometrischen Anwendungsaufgaben an rechtwinkligen Dreiecken	Texte mit anderen Textbausteinen und Dreieckskonstruktionen verwandt Texte mit aufgabenunabhängigen Dreiecksdarstellungen Texte mit grundsätzlich anderen Aufgaben und Lösungswegen <u>1. Bemerkung:</u> Die Strategie „Blickrichtung ändern“ beinhaltete Wiederholungen früherer Dreiecks-konstruktionen <u>2. Bemerkung:</u> Wie in „Folgerung 4“ erwähnt, war bei diesen sehr differenzier-ten Startaufgaben die Variationsmotivation geringer	6 7 10	Trivial-Strat. Blickrichtung-änderungs-Strat. Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
21. Woche: Berechnen von trigonometrischen Anwendungsaufgaben an allgemeinen Dreiecken	Aufgaben mit anderen Seiten- und Winkelangaben Seitenangaben als Aufgaben angegeben Zeichnungen übernommen und neue Fragen entwickelt Neue Texte und Zeichnungen mit anderen Seiten- und Winkelpositionen entworfen <u>Bemerkung:</u> Diese sehr differenzierte Startaufgaben schränkten erneut die Variationsmotivation ein	9 1 4 6	Trivial-Strat. Analogisieren-Strat. Frageverbessern-Strat. Strat.-Komb. (Analogisieren und Frage-verbessern)
25. Woche: Bestimmen der Lösungsmenge einer Bruchgleichung	Einfache Bruchgleichungen mit 3 Summanden Bruchgleichungen mit mindestens 4 Summanden Bruchgleichungen mit Koeffizienten aus anderen Grundmengen mit 2. Var.-Rtg. Bruchgleichungen mit höheren x-Potenzen und mit 3. Var.-Rtg.	1 7 9 7	Trivial-Strat. Analog.-.bzw. Iterierieren-Stra. Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren) Strat.-Komb. (Analogisieren und Iterieren)

35. Woche: Bestimmen der Lösungsmenge einer Wurzelgleichung	Einfache Wurzelgleichung mit 3 Summanden	5	Trivial-Strat.
	Wurzelgleichungen mit Potenzen, Brüchen und mehr als 3 Summanden	9	Analog.-Strat.
	Wurzelgleichungen mit Doppelwurzeln und 2. Var.-Rtg.	4	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	In den Wurzelgleichungen binomische Formeln eingebaut und 2. Var.-Rtg.	3	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)
	Wurzelgleichungen mit 3. Wurzel und 2. Var.-Rtg.	2	Strat.-Komb. (mehrfaches Analogisieren)

8.2 Die Strategieübersicht als quantitative Variationsmessung

Summiert man die Anzahlen der angewandten Strategien, so ergaben sich als quantitative Messung folgende durchschnittliche Teilnehmerzahlen von Schülern bzw. absolute Häufigkeiten:

Tabelle: 8.3:

Schulwoche	Trival-Strategie	Analogisieren-Strategie	Kombinationen von Strategien	Blickrichtungs-änderung-Strategie	Frage-verbesse-rung-Strategie	Aufgabe mit Lösung abgegeben
2. Woche	4	8	8	-	-	2
4.Woche	5	9	12	-	-	3
6. Woche	8	4	14	-	-	6
12. Woche	7	3	8	-	-	8
16. Woche	6	3	10	-	-	6
18. Woche	6	-	10	7	-	10
21. Woche	9	1	6	-	4	10
25. Woche	1	7	16	-	-	11
35. Woche	5	9	9	-	-	3

Die 35. Schulwoche war für die Entlassungsschüler die drittletzte Woche an der Schule. Die unverhältnismäßig oft angewandte Trivial-Strategie war ein Indiz dafür, dass flankierender Schulstress immer ein hemmendes Moment darstellt.

8.3 Analyse und Interpretation

Aus den vorgängigen Übersichten der eingesetzten Strategien kann man nun die Ergebnisse dieser Kontrolluntersuchung im 10. Schuljahr zusammenfassen.

Wenn noch im 9. Schuljahr die Trivial-Strategie als eine Einstieg- bzw. Startstrategie für durchschnittlich 1/3 der Schüler Anwendung fand, so waren es im 10. Schuljahr nur noch durchschnittlich 1/4 aller Schüler, die mit dieser Strategie die dazu bestimmten Mathematikaufgaben variierten. Dieses ist nur ein Kriterium, hier nicht nur von einer Stabilisierung der erworbenen Kompetenzen zu sprechen, sondern auch von einer zunehmenden Entwicklung. Diese Kompetenzzunahme wird besonders deutlich, wenn man die angewandten „Strategie-Kombinationen" des 9. Schuljahres mit denen des 10. Schuljahres vergleicht. Hatten die Schülerinnen und Schüler im 9. Schuljahr noch durchschnittlich 5 bis 6 mal bei jeder Aufgabe (vgl. Kap. 6.3.3, 6.4.2 und 6.5.3) so variiert, dass sie Strategien mit einander kombinierten, so wandten sie im 10. Schuljahr Strategie-Kombinationen fast doppelt so häufig an (vgl. Kap. 8.1).

Die Anzahl der Strategie-Kombinationen nahm insgesamt betrachtet im Vergleich mit anderen Strategien auch am meisten zu. In den Strategie-Kombinationen ihrer Aufgabenvariationen zeigten die Schüler im Vergleich zum 9. Schuljahr eine Kompetenzzunahme: Sie drückten mathematische Zusammenhänge mit mehreren Strategieanwendungen in ihren Variationen aus. Sie analogisierten häufig mehrmals oder gaben Strategie-Kombinationen mit unterschiedlichen Strategien ab. Dabei war das Interesse an den Aufgabenvariationen der Mitschüler während der anschließenden Unterrichtsphasen auch noch vorhanden. Hier war eine rege Beteiligung am Unterricht zu erleben. Interessant war aber die Beobachtung, dass mit zunehmender Abgabe von Variationslösungen auch die Anzahl der richtigen Lösungen stärker wuchs.

Das Erarbeiten von Strategie-Kombinationen machte, wie es mit den durchschnittlichen Angaben bereits erwähnt wurde, im 10. Schuljahr mit 47 % fast die Hälfte aller Aufgabenvariationen aus. Dies war ein Anstieg von 20 % gegenüber dem 9. Schuljahr (vgl. Abb. 36).

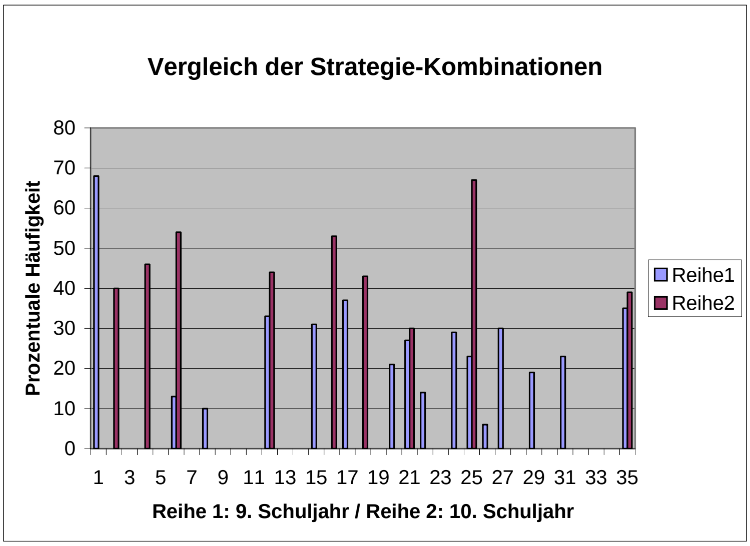


Abbildung 8.1

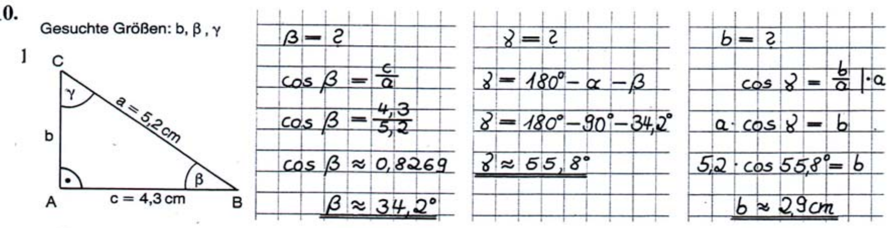
Betrachtet man die Aufgabenvariationen von der 6. bis zur 21. Schulwoche (vgl. Abb. 35, Spalte 3 und 4), so ist auffällig, wie die SchülerInnen insbesondere bei diesen Aufgaben nicht nur einmal die Analogisieren-Strategie anwandten, sondern diese miteinander vermehrt kombinierten. Die zu diesen Variationen vorgegebenen Startaufgaben hatten dabei als Merkmal, dass sie aus dem Bereich der Flächen- und Körperberechnungen und der Trigonometrie stammten, also geometrische Aufgabenstellungen waren (vgl. Abb. 33). Hier zeigte es sich, dass die SchülerInnen in dieser Kategorie der Aufgaben

- die vorgegebenen Zeichnungen oder Tabellen in der Startaufgabe ergänzten und erweiterten oder
- ihre neuen Variationen so gestalteten, dass sie eigene neue Zeichnungen erläuternd hinzufügten.

Dazu zwei Beispiele: Als erstes wird die Startaufgabe gezeigt, anschließend die Variation eines Schülers, der die Analogisieren-Strategie mehrfach anwendet und damit eine Strategie-Kombination durchführt.

1. Beispiel: Die Startaufgabe wurde der 16. Unterrichtswoche entnommen und beinhaltete eine Aufgabe mit einer Tabelle:

10.



Die dargestellten Lösungsschritte der Beispielaufgabe zeigen dir eine Möglichkeit, die fehlenden Größen b, β und γ zu berechnen.
Bestimme die fehlenden Stücke in einem rechtwinkligen Dreieck ABC.

	a)	b)	c)	d)	e)
a	14 cm				2.4 m
b		0,8 m	4,7 dm		3,6 m
c	6,8 cm	0,3 m		4,8 cm	
α	90°		18,6°	90°	
β		90°		52,6°	90°
γ			90°		

Abbildung 8.2

Aufgabenvariation:

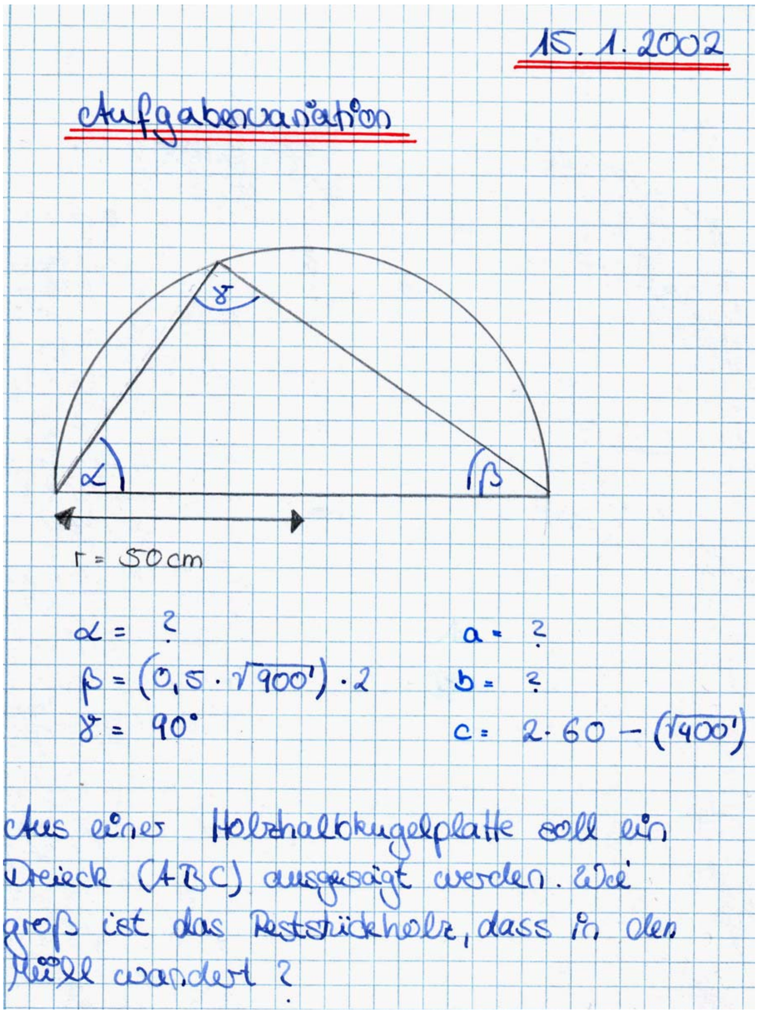


Abbildung 8.3

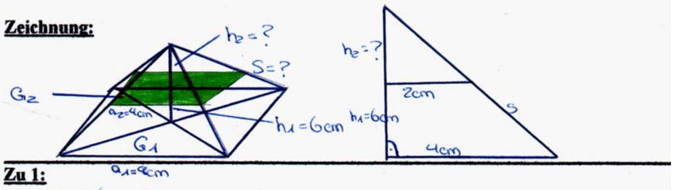
2. Beispiel:
Aufgabenvariation:

Aufgabenvariation: (von Bianca Zaun)

Ein Flacon hat die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche.
Der Stumpf der Pyramide hat an der Grundfläche G_1 die Kantenlänge $a_1 = 8cm$ und an der Grundfläche G_2 die Kantenlänge $a_2 = 4cm$. Die Höhe des Stumpfes beträgt $h_1 = 6cm$.

Aufgabe:
1. Berechne die Gesamthöhe der Pyramide !!! (2. Strahlensatz)
2. Berechne das Volumen des Pyramidenstumpfes !!!
3. Berechne die Seitenlänge s der Pyramide !!! (Satz des Pythagoras)
4. Berechne das Gesamtvolumen der Pyramide !!!

Zeichnung:



Zu 1:

$h_{ges} = \frac{h_2 + 6}{h_2} = \frac{4}{2} \quad | \cdot 2h_2$

$\Leftrightarrow 2(h_2 + 6) = 4h_2$

$\Leftrightarrow 2h_2 + 12 = 4h_2 \quad | -2h_2$

$\Leftrightarrow 12 = 2h_2 \quad | : 2$

$\underline{\underline{6}} = h_2$

Gesamthöhe: $h_1 + h_2 = 6cm + 6cm = \underline{12\,cm}$

Die Gesamthöhe der Pyramide beträgt 12 cm

Zu 2:

$V = \frac{1}{3} h (G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2)$ $\qquad G_1 = (8cm)^2 = 64cm^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot 6cm \, (64cm^2 + \sqrt{64 \cdot 16}cm^2 + 16cm^2)$ $\qquad G_2 = (4cm)^2 = 16cm^2$

$\Leftrightarrow \frac{6}{3} cm \cdot (112\,cm^2)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{224}}\,cm^3$

Das Volumen des Stumpfes beträgt 224 cm³

Zu 3: Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

$4^2 + 12^2 = s^2$

$\Leftrightarrow 16\,cm^2 + 144\,cm^2 = 160\,cm^2$

$\Leftrightarrow 160\,cm^2 = s^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\sqrt{160\,cm^2} = s$

$\underline{12{,}6\,cm} \approx s$ Die Seitenlänge s beträgt $\approx 12{,}6\,cm^2$

Zu 4:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$\Leftrightarrow \frac{64\,cm + 12\,cm}{3} = 256\,cm^3$

Das Gesamtvolumen der Pyramide beträgt 256 cm³

Abbildung 8.4

2. Beispiel:
Die dazugehörige Startaufgabe mit einer Zeichnung entstammte der 12. Unterrichtswoche:

6. **Berechne den Materialverbrauch für eine Blechwanne mit den angegebenen Maßen. Berücksichtige dabei, daß für Lötfalze zusätzlich 7% benötigt werden.**

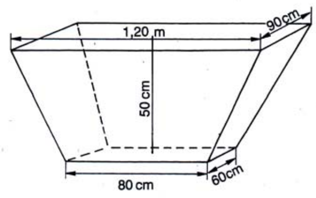


Abbildung 8.5

Die Aufgabenvariation dazu zeigt eine ausführliche Anwendung einer Strategie-Kombination (vgl. Anhang).

Fasst man diese Beobachtungen zusammen, so ist feststellbar, dass Forderungen erfüllt wurden (vgl. Kap. 1.5.3), wie

- „mathematical thinking skill“ mit „posing questions“ und „distinguishing“, wie die Beispiele zeigen,
- „mathematical argumentation skill“ mit „possessing a feel for heuristics“ innerhalb der Lösungen der eigenen Aufgabenvariation,
- „modelling skill“ mit „working with a mathematical model“, (darüber geben die Zeichnungen Auskunft)
- „problem posing skill“ mit „posing, formulating, [...] different kinds of mathematical problems“. (Das beweisen die Aufgabenvariationen, sobald die SchülerInnen weniger die Trivial-Strategien als z. B. die Analogisieren-Strategien anwandten.)

Kapitel 9

Kompetenzzunahme durch Aufgabenvariationen – Rückschau und Ausblick

Aufgabenvariationen bieten nicht nur die Möglichkeit, mathematische Kompetenzen zu schulen und nachhaltig zu fördern. Sie gewähren auch dem Unterrichtenden Möglichkeiten, einige Dimensionen seines Unterrichts zu vergrößern. Dazu zählt, dass Aufgabenvariationen einen diagnostischen Einblick in die Schüleraktivitäten bieten (siehe Ende des Kap. 9.3). Ferner verbessern sie die Fragekultur im Unterricht insofern, als dass den Schülerinnen und Schülern das Fragen bzgl. ihrer Mathematikaufgabe übergeben wird (vgl. auch Schupp, ebd. S. 12). Fragen werden nicht lehrerseitig gestellt (vgl. Kap. 5) sondern die Fragen entstehen durch das schülerseitige Variieren der Aufgaben. Damit einher geht auch die Gegebenheit, dass es motivierender ist, eigene Fragen zu lösen als fremdbestimmte. Die Aufgabenvariationen zeigen in ihren Ergebnissen auch (siehe Kap. 9.2), dass der Lehrer den Forderungen nach vernetztem Denken (vgl. Kap. 1.5.1) innerhalb seines Unterrichts leichter nachkommen kann.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Kompetenzforderungen im Fach Mathematik. Fokussiert wurde zunächst die historische Entwicklung des Kompetenzbegriffs bis zur PISA-Erbebung 2000 (Kap. 1). Auf Grundlage der Problem-Solving- und Problem-Posing-Ideen (Kap. 2) gab es viele Gründe, Aufgabenvariationen (Kap. 3) zum Erwerb mathematischer Kompetenzen einzusetzen.

Aufgabenvariationen bieten in ihrer Konzeption die Möglichkeit, den Erwartungen nach mehr mathematischer Kompetenz teilweise gezielt Rechnung zu tragen. Die dabei erworbenen Kompetenzen, ihre nachweisbare Stabilisierung und ihr Zuwachs können auch als Schüler-Sichtöffnungen angesehen werden (Kap. 6.8). Diese Öffnungen beziehen sich auf unterschiedliche Ebenen und Fragestellungen:

- Wie variieren Schüler Aufgaben in methodischer Hinsicht (methodische Kompetenz)?
- Kann ihr Interesse am Variieren auch nachhaltig geweckt werden (Motivationsaspekt)?
- Inwieweit werden auch bereits gelernte Unterrichtsinhalte angewandt (fachliche Kompetenz)? (siehe Abb. in Kap. 9.2).

Von der Wirksamkeit dieser drei Ebenen im Sinne einer erhöhten Eigenständigkeit der Schülerinnen und Schüler geben die Variationsbeispiele im Anhang ein Beispiel.

Welche Kompetenzen in der beobachteten Gesamtschulklasse dabei ausgebildet, also verstärkt und gefestigt wurden, zeigten die Variationsuntersuchungen zunächst im 9. Schuljahr (vgl. Kap. 9.1). Im 10. Schuljahr variierten dann die Schüler ihre Mathematikaufgaben in zunehmendem Maße quantitativ und qualitativ, was als eine nachhaltige Kompetenzzunahme zu interpretieren war (vgl. Kap.9.2).

Schülerinnen und Schüler können erworbene mathematische Kompetenzen mit Hilfe von Aufgabenvariationen ausdrücken, anschließend verbalisieren und reflektieren. Dabei diskutieren sie im Klassenverband eigene oder exemplarisch dargestellte Aufgabenvariationen und definieren die angewandten Strategien. Ihre Erfahrungen bauen sie mit zunehmend ideenreichen Strategien und Aufgabenlösungen aus. Dabei gehen die SchülerInnen bewusst ein „geistiges Risiko“ (Schülerzitat) ein. Sie wandeln zunächst versuchsweise die zuvor selbständig berechnete und im Klassenverband verglichene Aufgabe ab. Das hat immer als Konsequenz, dass auch die von ihnen variierte Aufgabe einer mathematischen Diskussion unterzogen wurde.

Kritisch muss festgehalten werden, dass das Variieren der Aufgaben hauptsächlich als Einzelarbeit ausgeführt wurde, da jeder der Schülerinnen und Schüler sich nur um den Entwurf der eigenen Variation zu kümmern hatte (vgl. Kap. 5.3 „Sozialformentwicklung“). Zu kritisieren ist auch, dass es länger als vermutet dauerte, bis die Lerngruppe bereit war, ihre eigenen Variationen zu verantworten. Gerne gab man sich zu Beginn des 9. Schuljahres mit der schriftlichen Niederlegung der Variationen zufrieden ohne diese selber rechnerisch zu überprüfen. Vermutlich überließen sie das der Diskussion innerhalb der Klasse.

9.1 Rückblick auf die Ergebnisse der Hauptuntersuchung im 9. Schuljahr

Die im Rahmen dieser Arbeit vorgenommene Längsschnittstudie an vier Schülerinnen und Schülern (Kap. 7) zeigte am Ende des 9. Schuljahres eine Überraschung:

Obwohl die Vier sehr heterogene Mathematikleistungen aufwiesen, entwickelte sich im Laufe des Jahres ein in Quantität und Qualität komparables Anwenden der Variationsstrategien sowohl untereinander als auch innerhalb der gesamten Klasse. Die vier Probanden setzten nämlich Strategien und deren Kombinationen in vergleichbarer Häufigkeit ein.

Ferner war die angewandte Variationsstrategie in enger Abhängigkeit von der zu variierenden Aufgabe zu sehen. Lag eine Aufgabenstellung vor, die in ihrer Öffnungsmöglichkeit nur begrenzt war, so entschieden sich die Schüler meistens für die Trivial-Strategie. Offene Aufgabenstellungen, also solche mit mehreren zu variierenden Parametern, motivierten hingegen in qualitativer und quantitativer Sicht, die verschiedenen Variationsstrategien anzuwenden. Kurz: Je offener die Aufgabe war, desto vielfältiger waren die Variationen. Die zunächst beobachteten kausalen Zusammenhänge stellt folgende Abb. dar:

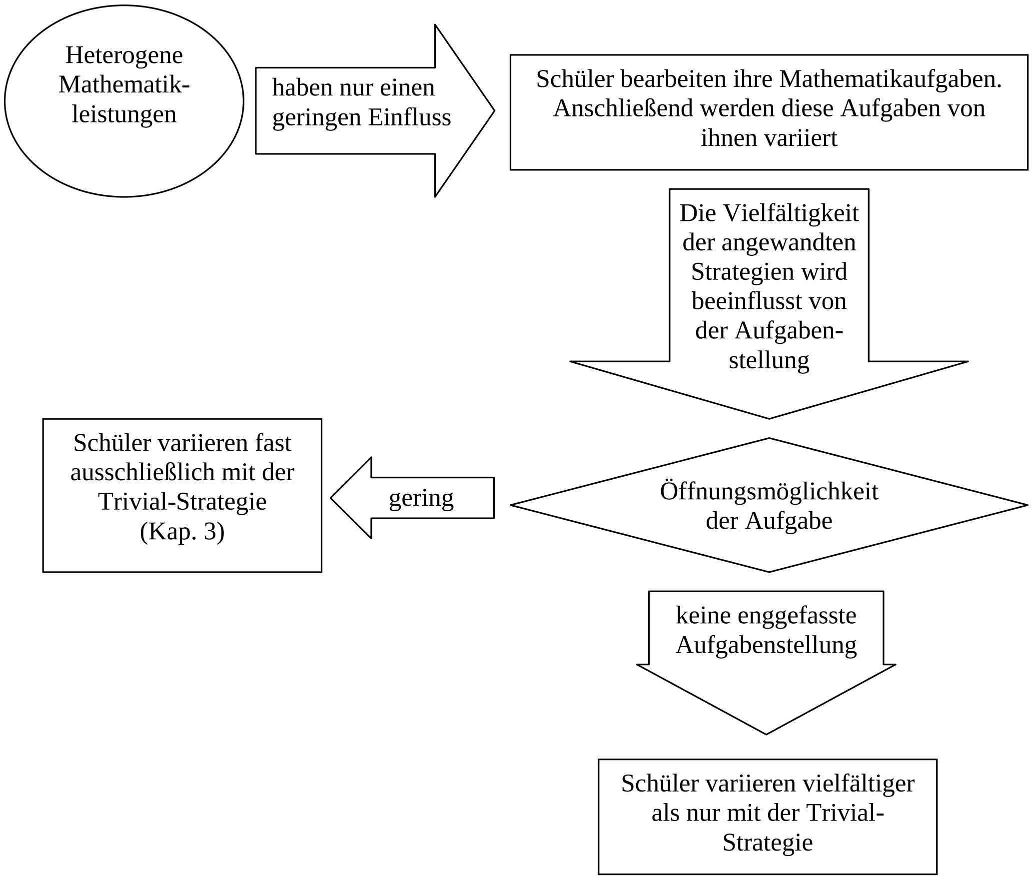


Abbildung 9.1

In der Hauptuntersuchung wurde zur Darstellung der Variationsentwicklung eine Kategorisierung der Aufgaben in algebraische, geometrische und Textaufgaben vorgenommen. Dadurch konnten im Laufe des 9. Schuljahres die Fragen nach den angewandten Strategien und erworbenen Kompetenzen besser verdeutlicht und beobachtet werden.

Die verschiedenen Aufgabenkategorien implizierten eine unterschiedlich häufiges Kombinieren von Strategien. Durchgängig war im 9. und 10. Schuljahr zu beobachten, dass die Analogisieren-Strategie die bevorzugteste ist. Diese Strategie löst nach kurzer Gewöhnungszeit zu Anfang des Schuljahres die Trivial-Stategie sukzessive ab. Seltener bedienten sich die Schüler der Strategien des Frageerweiterns und der Blickrichtungsänderung.

Wie häufig die Analogisieren-Strategie bei Aufgabenvariationen angewendet wird, hängt von der Aufgabe ab (vgl. Kap. 6.3.4 und 6.4.3).

Liegt eine algebraische Aufgabe oder eine Textaufgabe vor, so bevorzugen die Schüler Zahlbereichs- und Vorzeichenänderungen, Exponentenerhöhungen, größere Variablenanzahlen, Kettenaufgaben und binomische Ausdrücke. Dabei neigen sie weniger zur Kombination ihrer Strategien.

Ist eine Mathematikaufgabe mit Tabellen oder Zeichnungen vorgegeben, erhöht sich die Zahl der Kombinationen von Analogisieren-Strategien und von Frage- und Blickrichtungs-Strategien mit Analogisieren-Strategien. Favorisiert sind bei dieser Aufgabenart Variationen von Seitenangaben, Größen und textlichen Angaben. Variierte Symmetriebetrachtungen und Dimensionswechsel von zwei- zu dreidimensionalen Zeichnungen werden ebenso vorgenommen.

Aufgrund dieser Auswertungen können die ersten Forschungsfragen (vgl. Kap. „Überblick“) beantwortet werden:

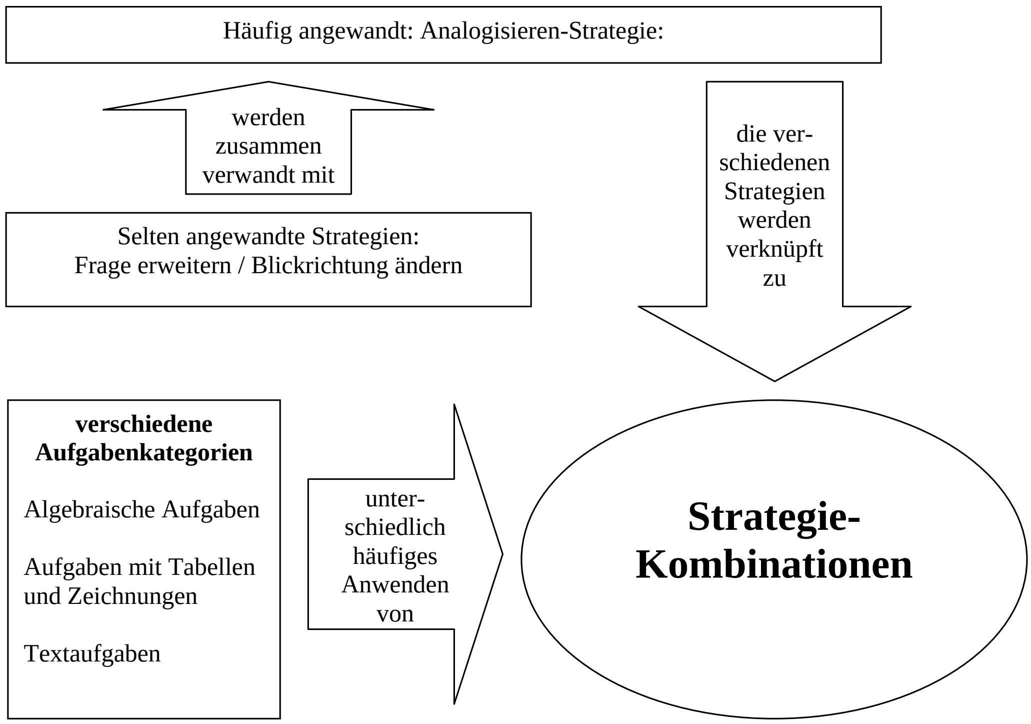


Abbildung 9.2

- Unabhängig vom Leistungsstand variieren SchülerInnen gegen Ende des ersten (9.) Schuljahres, in dem sie Aufgabenvariationen kennen gelernt haben, mit in Quantität und Qualität vergleichbaren Strategieanwendungen.
- Die angewandten Strategien entwickeln sich in Abhängigkeit von den Öffnungsmöglichkeiten der gestellten Aufgabe.
- Es kann beobachtet werden, dass nach einiger Zeit des Variierens hauptsächlich die Analogisieren-Strategie dominiert. Der erworbene Umgang mit dieser Strategie löst die anfänglich häufiger benutzte Trivial-Strategie ab.
- (Offene) Aufgaben mit Tabellen und Zeichnungen lassen eher Variationen zu als rein algebraische Aufgaben. Dabei werden die Analogisieren-Strategien häufiger miteinander kombiniert.
- Damit werden insbesondere Teilkompetenzen wie Anwendungen zeichnerischer Fähigkeiten, Aufgabenmodellierungen und ein Vorantreiben bzw. Weiterdenken innerhalb der Mathematikaufgaben erworben.

9.2 Rückblick auf die Ergebnisse der Hauptuntersuchung im 10. Schuljahr

Zu Beginn des 10. Schuljahres lag die Vermutung nahe, dass beim Variieren von Mathematikaufgaben die SchülerInnen als Einzelindividuen in der Lage sind, partiell „mathematical skills in thinking, problem posing, modelling“ zu entwickeln (vgl. Kap. 1 u. 2).

Im Klassenverband weisen sie in den anschließenden Unterrichtsphasen Teilkompetenzen auf in „mathematikal skills“, „problem solving, feeling for heuristics, representing“ (vgl. Kap. 2).

Bedenkt man die Vielzahl der einzelnen Variationsrichtungen, die Schupp in seiner Strategieliste (vgl. Kap. 3.3) aufzeigt, so war es nach dem Ende des 9. Schuljahres nicht mehr überraschend, dass die meisten Strategien nicht als eine „Reinform“ in den Variationen vorkommen , sondern von den SchülerInnen mit anderen Strategien kombiniert werden.

Diese Beobachtung veranlasste, den Strategie-Kombinationen weiterhin eine besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Tatsächlich nahm diese Art der Variation im Laufe des 10. Schuljahres quantitativ zu (vgl. Kap. 6). Als Grundlage dieser Kombinationen hatten die SchülerInnen (nach einer Gewöhnungszeit Anfang Klasse 9) mit zunehmender Häufigkeit weiter die

Analogisieren-Strategie verwendet. Dieser Strategie fiel damit die Rolle einer Schlüsselkompetenz zu.

Die Qualität der Aufgabenvariationen unter Zuhilfenahme der Analogisieren-Strategie war messbar und nahm zu (vgl. Kap. 8). In der Kategorie der „Aufgaben mit Tabellen und Zeichnungen“ wurden die Texte in den Aufgabenvariationen ausführlicher und vermehrt mit Zeichnungen ergänzt. Wollten SchülerInnen ihre Variationen deutlicher darstellen, so ergänzten sie sie erneut mit Zeichnungen.

Hinzu kommen die Diskussionsbeiträge der SchülerInnen in den Reflexionsphasen nach dem Variieren ihrer Aufgaben (vgl. Kap. 5). Gemeinsam konnten im Klassenverband noch weitere Variationen entdeckt und als Strategien erklärt werden.

Am Ende der 10. Klasse lagen quantitative und qualitative Zunahmen von Teilkompetenzen vor. Darunter fielen die Kompetenzen in der kognitiven Anwendung von mathematischen Techniken und heuristischen Methoden:

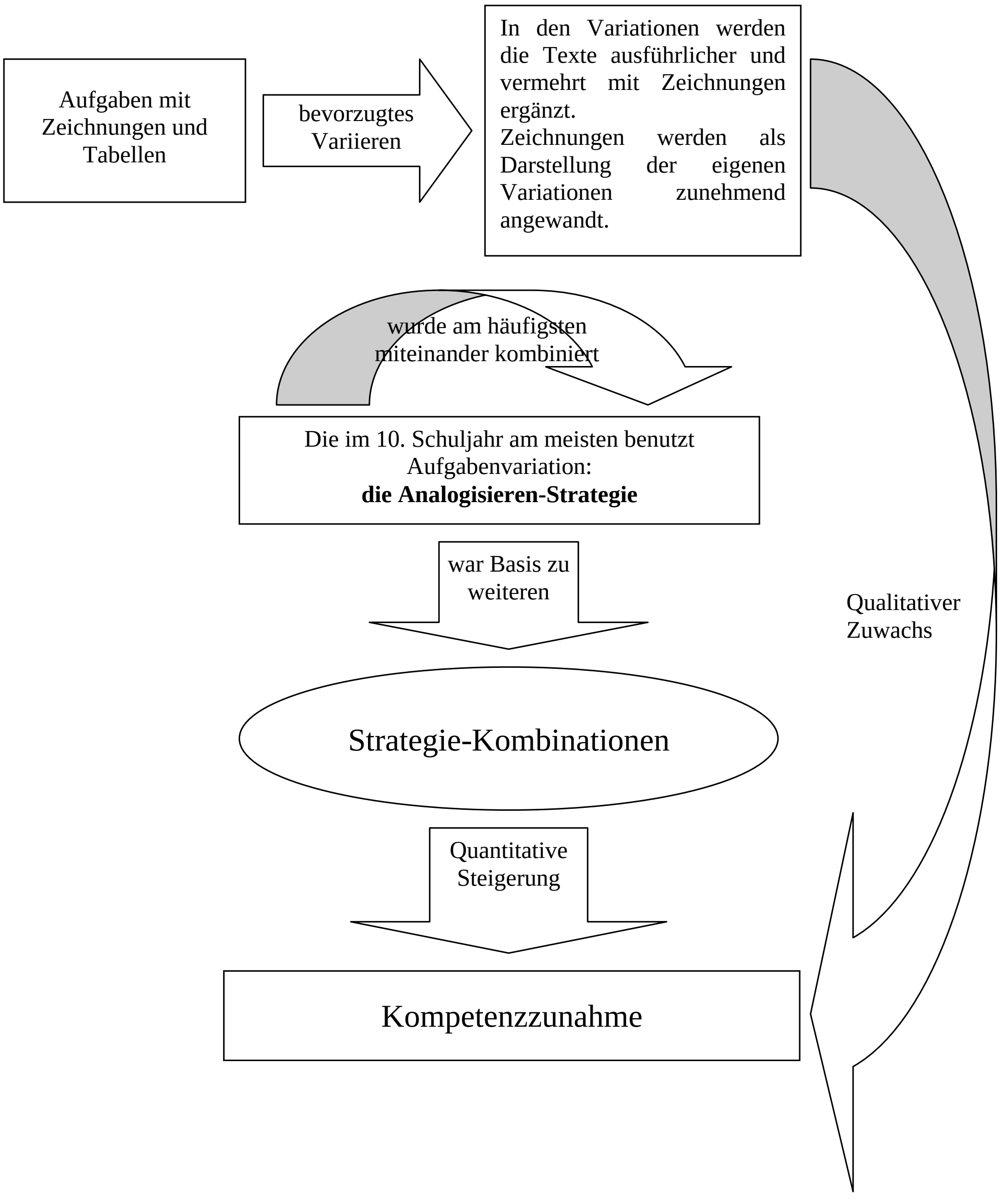


Abbildung 9.3

Als Ergebnis kann zusammengefasst werden:

- Während Schülerinnen und Schüler Aufgaben variieren und formulieren, erweitern sie mathematische Problemstellungen selbständig (vgl. Kap. 5).

- Aufgabenvariationen unterstützen zunehmend die Fähigkeit, heuristische Methoden, hauptsächlich das Analogisieren, Kombinieren, und Modellieren bei Mathematikaufgaben anzuwenden (siebe Abb.).

- Beim Auswerten der Aufgabenvariationen üben die SchülerInnen das Reflektieren und Verbalisieren ihrer Ergebnisse (vgl. Kap. 6).

9.3 Schlussfolgerungen Ausblick

Innerhalb der Unterrichtsorganisation können Aufgabenvariationen einen festen Stellenwert im didaktisch/methodischen Unterrichtsablauf bekommen. Das Training ist nur wenig zeitaufwendig, beinhaltet aber die Chance, wichtige mathematische Kompetenzen auszubilden. Dabei ist es aber noch offen, wie sich diese Übungen innerhalb der Schülerpopulationen anderer Schulformen auswirken können, m. a. W. wie stabil diese Kompetenzen sind. Obgleich unsere Untersuchungen in einer Gesamtschulklasse durchgeführt wurden, besteht aus der heutigen Sicht kein Grund, die Variation von Mathematikaufgaben nicht auch in allen anderen Schulformen einzuführen. Aufgabenvariationen sollten zu einem festen methodischen und thematischen Schwerpunkt unterrichtlicher Intervention werden, repräsentieren sie doch ein Charakteristikum mathematischen Arbeitens. Von besonderem Interesse wäre dabei die Frage, in welcher Schulform welche Kompetenzen wie stark ausbaufähig sind.

Es wäre hilfreich, wenn Autoren von Schulbüchern, so wie sie vereinzelt schon das Öffnen von Aufgaben in ihre Lehrwerke übernommen haben, auch Aufgabenvariationen als Inhalte anbieten würden.

Der Frage der Bewertung von Schülerleistungen in Bezug auf die Variationen von Aufgaben sowohl im Unterricht als auch bei Klassenarbeiten müsste noch ausführlicher nachgegangen werden. Hier begegnet uns die bekannte Frage aus dem Bereich des Problemlösens, wie entsprechende Schüleraktivitäten einzustufen sind.

Ohne dass es ein zentraler Bestandteil dieser Arbeit war, wurden an der Gesamtschule Duisburg-Mitte während der zweijährigen Forschungsarbeit Aufgabenvariationen auch innerhalb von Klassenarbeiten eingesetzt (siehe Kap. 5.7). Weitergehende Forschungsfragen werden dadurch aufgeworfen: Es wäre interessant zu untersuchen, wie man in Klassenarbeiten unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Strategieanwendungen und ihrer Kombinationen Aufgabenvariationen optimaler bewerten könnte.

Originalität, Qualität und Quantität von Aufgabenvariationen geben dem Lehrer schließlich eine Rückmeldung darüber, welche Kompetenzen bei SchülernInnen ausgeprägt sind und mit welcher Motivation, Kreativität und Risikobereitschaft sie bereit sind, ungewohnte (Denk-)Wege zu gehen.

Aufgabenvariationen sind ein ungewohnter Weg, mathematische Kompetenzen bei Schülern auszubilden. Sie sind aber ein gangbarer Weg zum erfolgreichen Mathematiktreiben.

Literaturverzeichnis

[1] *Schlechte Noten für den Mathematikunterricht in Deutschland - Anlass und Chance für Innovationen, Erklärung der Fachverbände DMV, GDM, MNU.* Pädagogischer Zeitschriftenverlag, 1997 (Mathematik in der Schule 5)

[2] AEBLI, H: *Psychologische Didaktik, Didaktische Ausweitung der Psychologie von Jean Piaget.* Stuttgart : Klett-Verlag, 1963

[3] AEBLI, H: *Das operative Prinzip, in: mathematik lehren.* Velber : Friedrich-Verlag, 1985

[4] ANDELFINGER, B: *Didaktischer Informationsdienst Mathematik, Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen, Curriculum.* Soest : Landesinstitut für Schule und Weiterbildung, 1985

[5] ARTIGUE, M ; SIERPINSKA, Anna (Hrsg.) ; KILPATRICK, Jeremy (Hrsg.): *Through The Eyes Of Mathematicans, Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity.* Dordrecht : Kluver Academic Publisher, 2001

[6] BLUM, F: *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II.* Wiesbaden : Vieweg Verlag, 1997

[7] BLUM / WIEGAND: *Offene Aufgaben - wie und wozu, in: mathematik lehren.* Velber : Friedrich Verlag, 2000

[8] CONNOR & HAWKINS: *What materials are most useful to children in learning to solve problems?* Paris : Unesco, 1936

[9] DAVIS, J: *What do I know? A study of mathematical self-awareness.* Tkushima, 1952 (College Mathematics Journal)

[10] (ED.), OECD: *Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment.* Paris : OECD Publications, 1999

[11] (Ed.), OECD: *Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment.* Paris : OECD Publications, 1999

[12] English, L: *Promoting a Problem-Posing Classroom.* Reston : Society of national association Publication, 1997 (Teaching children mathematics)

[13] Farnsworth, D. L.: *Teaching variation using the web.* Garden City, N.Y., 2001 (Mathematics and Computer Education)

[14] Freudenthal, H: *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Stuttgart : Klett-Verlag, 1970

[15] Fricke, A: *Mathematik: Elemente einer Didaktik und Methodik.* Stuttgart : Klett, 1970

[16] Grosse, H: *Historische Rechenbücher des 16. und 17. Jahrhunderts.* Wiesbaden : Sändig, 1965

[17] Gutzmer, A: *Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten - Reformvorschläge von Meran 1905.* Seelze : Berlin Verlag, 1980

[18] Hefendehl-Hebeker, L: *Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht.* 2004 (Schriftenreihe des Instituts für Mathematik, Universität Duisburg-Essen)

[19] Herget, W: *Aufgaben öffnen, in: mathematik lehren.* Velber : Friedrich-Verlag, 2000

[20] Hoehn, E: *Problem Posing in Geometry.* Reston : edpress, 1991

[21] Kilpatrick, J: *Variables and methodologies in research on problem solving.* Columbus, Ohio : Soc., 1978 (Mathematical problem solving)

[22] Kilpatrick, J: *Problem formulating: where do good problems come from?* Hillsdale : Erlbaum, 1987 (Cognitive science and mathematics education)

[23] Kilpatrick, J: *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics.* School Mathematics Group, Stanford University, 1992

[24] Klafki, W: *Didaktische Analyse als Kern der Unterrichtsvorbereitung.* Hannover : Schroedel, 1974. – In: H. Roth, A. Blumenthal: Auswahlreihe A

[25] Klein, F: *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 1997

[26] Krüger, K: *Erziehung zum funktionalen Denken*. Berlin : Logos Verlag, 2000

[27] Kultusministerkonferenz: *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz*. München : Kluwer, 2005

[28] Leibnitz, G. W.: *Die mathematischen Schriften*. Bd. 5. Hildesheim : C. I. Gerhardt, 1971

[29] Lenné, H: *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Stuttgart : Klett, 1969

[30] Lester, F: *Mushings about mathematical problem-solving research*. Philadelphia : Franklin Inst., 1982 (Issues in Research)

[31] Lexikographisches Institut: *Der große Knaur*. Bd. 19. München, 1983

[32] Lietzmann, W: *50 Jahre Meraner Vorschläge*. Troisdorf : Dümmler, 1955

[33] Ministerium für Schule und Weiterbildung: *Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Sekundarstufe I Gesamtschule, Richtlinien und Lehrpläne*. Frechen : Verlagsgesellschaft Ritterbach mbH, 1998 (Schriftenreihe in Schule NRW 3106)

[34] NCTM: *On The Mathematics Curriculum Of The High School*. Reston : edpress, 1962 (The Mathematics Teacher of March 1962)

[35] NCTM: *An Agenda for Action*. Reston : edpress, 1980 (Recommmendations for School Mathematics of the 1980s)

[36] NCTM: *Professional standards for teaching mathematics*. Reston : edpress, 1991

[37] Neubrand, M: *Framework zur Einordnung des PISA-Mathematik-Tests in Deutschland*. Franzbecker, 1999 (Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung)

[38] Neubrand, M: *Unterrichtsentwicklung und PISA*. Stuttgart : RAABE, 2002

[39] NEUBRAND, M: *"Mathematical literacy"/"Mathematische Grundbildung"*. Wiesbaden : VS Verlag für Sozialwissenschaften, 2003 (Zeitschrift für Erziehungswissenschaft)

[40] NORDRHEIN-WESTFALEN, Eine Schriftenreihe des K. i.: *Grundschule, Richtlinien Mathematik*. Köln : Greven Verlag, 1998

[41] OECD: *Measuring student knowledge and skills*. Paris : OECD, 1999

[42] PEHKONEN, G: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, International Review on Mathematical Education*. Bd. 4: *Mathematical beliefs*. Eggenstein-Leopodshafen : Zentrum Verlag, 1996

[43] POLYA, G: *How to solve it*. Princeton : University Press, 1945

[44] REISS, G.: *Was hat PISA 2000 den Mathematikerinnen und Mathematikern zu sagen?* Berlin : DMV, 2002 (DMV-Mitteilungen)

[45] RICHERT, H: *Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens*. Seelze : Berlin Verlag, 1925. – Wiederabgedruckt in MU 26.6. (1980)

[46] SCHOENFELD, A: *Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance*. Nicosia : Soc., 1979 (Journal for Research in Mathematics Education)

[47] SCHOENFELD, A: *Explicit heuristic training as a varialble in problem-solving performance*. Nicosia : Soc., 1979 (Journal for Research in Mathematical Education)

[48] SCHOENFELD, A.: *Reflections on an Impoverished Education*. Princeton NJ, 2001 (L. A. Steen: Mathematics and Democracy: The Case for Qualitative Literacy)

[49] SCHUBRING, G: *Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs im 19. Jahrhundert*. Weinheim : Beltzverlag, 1983

[50] SCHUPP, H: *Programme für den Stochastik-Unterricht*. Bonn : Dümmler-Verlag, 1991

[51] SCHUPP, H: *Thema mit Variationen*. Hildesheim : Verlag Franzbecker, 2002

[52] SIEBENEICHER, C: *Mathematik in deutschen Schulen*. Berlin : DMV, 2002 (DMV-Mitteilungen)

[53] SILVER, E: *On Mathematical Problem Posing, For the Learning of Mathematics.* Kingston, Ontario, Canada : FLM Publishing Association, 1994

[54] SOWDER, J: *The Looking-back Step in Problem Solving.* 1986 (Mathematic Teacher)

[55] STEINHÖFEL / REICHOLD: *Didaktisch-methodische Aspekte beim Behandeln von Gesetzesaussagen und Verfahren unter besonderer Berücksichtigung der Aktivierung der Schüler.* Karl-Marx-Stadt : Verl. d. Wiss., 1987

[56] TIETZE, Wolpers: *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II.* Wiesbaden : Vieweg Verlag, 1997

[57] TIETZE, Wolpers: *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II.* Wiesbaden : Vieweg Verlag, 1997

[58] TOROK, R.: *Putting the variation into change and data. Kennmorehills, Queensland: Australian Association of MAthematics Teachers, June 2000.* 2000 (The Australian Mathematics Teacher)

[59] TÖRNER, G.: 2000 (DMV-Mitteilungen)

[60] TÖRNER, G.: *DMV-Mitteilungen 1/2000.* Berlin : DMV, 2000

[61] VACC, N.: *Individualizing Mathematics Drill and Practice.* Reston : edpress, March 1987 (Arithmetic Teacher)

[62] VERGNAUD, G: *Towards a cognitive theory of practice.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1998

[63] VERSCHAFFEL, L.; DE CORTE, E.: *Number and arithmetic, in: Bishop, A. J.; Clements, Ken; Keitel, Christine; Kilpatrick, Jeremy; Laborde, Colette. International Handbook of Mathematics Education.* Bd. 4. Dordrecht : Kluwer, 1996

[64] WALTER, Brown : *The art of problem posing.* Philadelphia : Erlbaum, 1983

[65] WEIGAND, H: Berlin : Pädagogischer Zeitschriftenverlag, 1997 (Mathematik in der Schule 10)

[66] WEINERT, F: *Leistungsmessung in der Schule.* Weinheim : Beltzverlag, 2001

[67] WINTER, H: *Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule.* Ratingen : Henn Verlag, 1972 (Beiträge zum Lernzielproblem)

[68] WITTMANN, E.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Bd. 1. Braunschweig : Vieweg-Verlag, 1981

[69] WUSSING, H: *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik.* Berlin : Dt. Verl. d. Wiss, 1979

[70] WURZ, M: Pädagogischer Zeitschriftenverlag, 1998 (Mathematik in der Schule 7/8)

[71] ZECH, F: *Grundkurs Mathematikdidaktik.* Weinheim : Beltz-Verlag, 1977

[72] ZIMMERMANN, B: *Allgemeine Systeme heuristischer Strategien und Ratschläge.* Stuttgart : Klett-Verlag, 1983 (Der Mathematikunterricht)

Anhang

Anlage 1
aus: Kernlehrplan Mathematikunterricht, Gesamtschule, Sek. I, NRW,
Stand: 3. Oktober 2003, Entwurfsfassung

KOMPETENZEN im Fach Mathematik

1 Kompetenzen aus dem Bereich des **mathematischen Denkens**, die durch folgende Aufforderungen angestoßen werden
Die Schülerinnen werden aufgefordert Fragen zu beantworten wie:
- 1.1 Gibt es welche?
- 1.2 Wenn ja, wie viele?
- 1.3 Wie kannst du feststellen, dass .... ?
- 1.4 Stelle Vermutungen auf zu .....

2 Kompetenzen aus dem Bereich des **mathematischen Argumentierens**, die durch folgende Aufforderungen angestoßen werden
Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert
- 2.1 ihre Gedankengänge zu erläutern
- 2.2 vorgegebene Gedankengänge zu vergleichen oder zu bewerten
- 2.3 Ergebnisse zu begründen und zu erläutern

3 Kompetenzen aus dem Bereich des **mathematischen Modellierens**, die durch folgende Aufforderungen angestoßen werden
Die SchülerInnen werden aufgefordert
- 3.1 zu erläutern warum ein vorgegebenes Modell nur bedingt geeignet ist
- 3.2 in Bezug auf einen Anwendungszusammenhang ein geeignetes Modell auszuwählen
- 3.3 für einen Anwendungsbereich ein geeignetes Modell zu finden

4 Kompetenzen aus dem Bereich des **mathematischen Problemlösens**, die durch folgende Aufforderungen angestoßen werden
Die SchülerInnen werden aufgefordert
- 4.1 verschiedene Lösungswege für ein mathematisches Problem zu benennen, zu vergleichen , zu bewerten oder zu beschreiten
- 4.2 ein mathematisches Problem zu beschreiben
- 4.3 unterschiedliche Formen von mathematischen Problemen zu benennen

5 Kompetenzen aus dem Bereich der **mathematischen Repräsentation**, die durch folgende Aufforderungen angestoßen werden
Die SchülerInnen werden aufgefordert
- 5.1 zwischen verschiedenen Formen der mathematischen Repräsentation zu wechseln
- 5.2 Wechselbeziehungen zwischen verschiedenen Formen zu erläutern
- 5.3 eine für den Zweck geeignete Form der mathematischen Repräsentation auszuwählen

6 **Symbolische, formale und algorithmische Kompetenzen**, die durch folgende Aufforderungen angestoßen werden
Die SchülerInnen werden aufgefordert
- 6.1 mathematische Formel, Symbole zu benutzen
- 6.2 Variablen zu gebrauchen
- 6.3 Texten ihren mathematischen Gehalt zu entnehmen und durch mathematische Symbole, Formeln zu beschreiben
- 6.4 Mathematische Algorithmen zu benutzen

7 Kompetenzen im Bereich der **mathematischen Kommunikation**, die durch folgende Aufforderungen angestoßen werden
Die SchülerInnen werden aufgefordert
- 7.1 Äußerungen mit mathematische Gehalt zu formulieren
- 7.2 Äußerungen mit mathematischem Gehalt wiederzugeben

8 Kompetenzen im Bereich der **Nutzung von Hilfsmitteln und mathematischem Werkzeug**, die durch folgende Aufforderungen angestoßen werden
Die SchülerInnen werden aufgefordert
- 8.1 mathematisches Werkzeug zu nutzen
- 8.2 Taschenrechner (auch graphikfähige) zu nutzen
- 8.3 zu begründen, warum ein bestimmtes Werkzeug zur Lösung (nicht) geeignet ist
- 8.4 zu erläutern, wie ein bestimmtes Ergebnis eines Taschenrechners zu interpretieren ist

Anlage 2a
aus: siehe Anlage 1

Stufen mathematischer Kompetenz

Zur Auswertung des PISA-Tests werden die im folgenden erläuterten Stufen mathematischer Kompetenz definiert. Sie beschreiben unterschiedliche Ausprägungen der mathematischen Grundbildung inhaltlich. Die Zuordnung der Schüler auf diese Kompetenzstufen ergibt sich aus der Forderung, dass alle Schüler einer bestimmten Stufe mindestens 50% der Aufgaben dieses Niveaus lösen können.

Stufe I: Rechnen auf Grundschulniveau
Schüler auf dieser Stufe verfügen lediglich über arithmetisches und geometrisches Wissen auf Grundschulniveau. Sie können dieses Wissen abrufen und unmittelbar anwenden, wenn eine Standardaufgabe vorliegt. Begriffliche Modellierungen sind nicht leistbar.

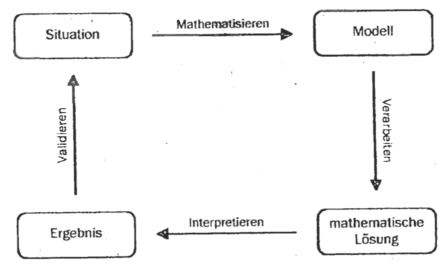
Stufe II: Elementare Modellierungen
Einfachste begriffliche Modellierungen sind möglich, wenn sie in einen konkreten Kontext eingebettet sind. Aus mehreren Lösungsansätzen kann ein passender gefunden werden, wenn durch Grafiken, Tabellen, Zeichnungen usw. Hilfen gegeben sind. Allerdings sind nur Wissensinhalte aus der Grundschule sicher verfügbar.

Stufe III: Modellieren und begriffliches Verknüpfen auf dem Niveau der Sekundarstufe I
Die Schüler verfügen auch über einfache Wissensinhalte der Sekundarstufe I. Sie können Konzepte aus unterschiedlichen mathematischen Bereichen verknüpfen und zur Lösung von Problemstellungen nutzen, wenn visuelle Darstellungen den Lösungsprozess unterstützen.

Stufe IV: Umfangreiche Modellierungen auf der Basis anspruchsvoller Begriffe
In technischen Bereich sind umfangreiche Verarbeitungsprozesse leistbar und Problemlösungen können über mehrere Zwischenschritte hinweg aufgebaut werden. Auch offene Modellierungsaufgaben werden bewältigt.

Stufe V: Komplexe Modellierung und innermathematisches Argumentieren
Die Schüler verfügen über anspruchsvolles curriculares Wissen und können dieses flexibel einsetzen. Sie bewältigen sehr offen formulierte Aufgaben, bei denen ein Modell frei gewählt bzw. konstruiert werden muss. Sie sind in der Lage, Begründungen und Beweise zu geben, und können über Modellbildungsprozesse reflektieren.

Zusammenfassung: Modellieren
Das Bearbeiten problemhaltiger Situationen mit Hilfe der Mathematik kann als Modellierungsprozess angesehen werden, der sich in vier Phasen gliedert:



Wodurch wird das Anforderungsniveau einer Aufgabe bestimmt?
Der Test PISA 2000 umfasste im Bereich Mathematik in Deutschland 117 Aufgaben (31 internationale, 86 nationale).
Das Lösen von Aufgaben wird bei PISA wie oben dargestellt im Wesentlichen als Modellierungsprozess angesehen. Demzufolge wird das Anforderungsniveau einer Aufgabe von folgenden Aspekten beeinflusst:

- Wie komplex ist der zu Grunde liegende Modellierungsprozess?
- Ist eine Reproduktion, eine Verknüpfung oder ein Transfer von Wissen nötig?
- Gibt es vielfältige Lösungsmöglichkeiten?
- Wie viele verschiedene Größen müssen verarbeitet werden?
- Ist die Aufgabe in einen Kontext eingebunden?
- Welcher curricularen Stufe ist das Wissen zuzuordnen (Grundschule, Sekundarstufe I)?
- Sind Argumentationen, Begründungen oder Reflektionen gefordert?

Diese Aufgabenmerkmale und die Ergebnisse der Bearbeitung der Aufgaben erlauben differenzierte
Rückschlüsse auf das Fähigkeitsniveau der Schüler.

Anlage 2b:
aus: siehe Quellen

Übersicht über die Kompetenzstufen der mathematischen Grundbildung nach PISA

Stufe	curriculare Wissensstufe	Aufgabenstellung	rechnerische Modellierung	begriffliche Modellierung
V	höhere algebraische Techniken	sehr offen formuliert	komplex, auf hohem Niveau	selbständiges, freies Modellieren Begründen, Beweisen, Nachdenken über Modellierungsprozess
IV	umfangreichere Wissensinhalte der Sek I mathematische Grundtechniken (z. B. Termumformungen)	offene Aufgabenstellung	komplex, umfangreiche Verarbeitungsprozesse	Aufbau einer Lösung über mehrere Zwischenschritte, Finden des eigenen Lösungsweges, Beurteilung mathematischer Modelle (z. B. funktionaler Zushg.)
III	Einfache Wissensinhalte der Sek I Standardstoff der Sek I)	Lösungsprozess wird durch visuelle Darstellungen unterstützt	einfach, Verknüpfen von Konzepten aus unterschiedlichen Bereichen mit Hilfe (siehe links)	Vorgegebene Zusammenhänge verstehen
II	arithmetisches und geometrisches Wissen auf Grundschulniveau	vorgegebene Struktur zur Erleichterung der Modellierung: Graphiken, Tabellen, Zeichnungen	Durch Hilfen (siehe links) unter mehreren Läsungsansätzen den passenden finden	einfachste Modellierung, Hinweise unterstützen den begrifflichen Schritt
I		legt Standard-mathematisierung nahe	Abrufen von Wissen und unmittelbares Anwenden	nicht leistbar

Quellen: Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.), PISA 2000, Kap. 3, Abschnitt 4
Baumert u. a., PISA 2000 – Die Länder der BRD im Vergleich, S. 26 ff
M. u. J. Neubrand, Klieme, Lüdtke, Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung, Unterrichtswissenschaft-Zeitschrift für Lernforschung, Heft 1/2002

Anlage 3

Mathematik 9 Gesamtschule

Erweiterungskurs

Autoren: Siegfried Appelhans, Gelsenkirchen
Christa Klingen, Duisburg
Uwe Scheele, Bielefeld
Joachim Stoffer, Herne
Wilhelm Wilke, Stadthagen

westermann

Inhalt

Zeichenerklärung:

Seite ohne farbige Streifen	Einführung in ein neues Thema und Übungen auf Grundniveau zur Auswahl
Seite mit blauem Streifen	Übungen auf gehobenem Niveau und Zusatzstoffe
Seite mit rotem Streifen	Übungen auf hohem Niveau und Zusatzstoffe
15.	Aufgaben mit Prüfzahlen zur Selbstkontrolle
	Aufgaben zum Tüfteln

Bildquellennachweis

Titelfoto: Pictor International, München
Markus Heumann, Stadthagen: 162.1
Alle übrigen Fotos: Römisch Zehn – I. Polastri/G. Druwe, Braunschweig
Alle Zeichnungen: Techn.-Graph. Abteilung Westermann
Einbandgestalter: ALI Werkstatt f. Gestaltung (A. Homey), Wendeburg

Anlage 4

Mathematik 10
Gesamtschule

Erweiterungskurs

Autoren: Siegfried Appelhans, Gelsenkirchen
Christa Klingen, Duisburg
Uwe Scheele, Bielefeld
Joachim Stoffer, Herne
Wilhelm Wilke, Stadthagen

westermann

Inhalt

Zeichenerklärung:

Seite ohne farbige Streifen	Einführung in ein neues Thema und Übungen auf Grundniveau zur Auswahl
Seite mit blauem Streifen	Übungen auf gehobenem Niveau und Zusatzstoffe
Seite mit rotem Streifen	Übungen auf hohem Niveau und Zusatzstoffe

15. Aufgaben mit Prüfzahlen zur Selbstkontrolle

Aufgaben zum Tüfteln

Anlage 5:
aus: Schriftenreihe Schule in NRW, Nr. 3106, Sekundarstufe I, Gesamtschule, Richtlinien und Lehrpläne, Mathematik, MSWWF, Düsseldorf, Verlagsgesellschaft Ritterbach, 1998, S. 70-83

3.2.3 Themenfelder für die Jahrgangsstufen 9 und 10

Anforderungen	Inhalte	Sinn, Bedeutung, zentrale Ideen
Themenfeld: Daten und Zufall Daten interpretieren und bewerten, Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen, darstellen und interpretieren		
Statistische Daten auswerten, Mittelwerte und Streumaße bestimmen und interpretieren; mit Prozentanteilen rechnen; Verteilungen und Verteilungsfunktion graphisch darstellen; Wahrscheinlichkeiten durch kombinatorische Überlegungen bestimmen; Gewinnchancen bei Glücksspielen bestimmen	**Arithmetik:** Rechnen mit rationalen Zahlen, Rechnen mit Potenzen, Prozentrechnung **Stochastik:** Wahrscheinlichkeit; einfache kombinatorische Verfahren*; Verteilung, Summenverteilung*, Verteilungsfunktion*, Mittelwerte, Streumaße*; Diagramme **Hilfsmittel:** Taschenrechner; Computer (Tabellenkalkulation, Statistikprogramm, Simulationsprogramm)	Statistische Kennwerte und Darstellungsformen helfen, große Datenmengen handhabbar zu machen, zu bewerten und Entscheidungen der jeweils gewählten mathematischen Modellierung aufzuzeigen. Wahrscheinlichkeiten ermöglichen Modelle, die Aussagen über zukünftige, nicht determinierte Vorgänge gestatten. Die Güte der Aussagen hängt von dem Grad der Sicherheit ab, mit dem Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden können.

Anforderungen	Inhalte	Sinn, Bedeutung, zentrale Ideen
Themenfeld: Körper und Flächen Körper und Flächen konstruieren, berechnen und an Gegenständen des Alltags und der Technik wieder entdecken		
Körper in der Ebene darstellen; Flächen und Rauminhalte berechnen; Abwicklungen von Verpackungen analysieren; Mengen und Preise berechnen; Wege zur Lösung komplexer Sachaufgaben finden und begründen sowie Berechnungen ausführen	**Arithmetik:** Rechnen mit Potenzen, Wurzeln, Näherungen*, Prozentrechnung **Algebra/Funktionen:** Verhältnis, Zuordnung zwischen Größenbereichen, Variable, Gleichung, Proportion, Formeln für Oberfläche und Volumen von Körpern* **Geometrie:** Abwicklung, Prisma, Zylinder, Kegel, Pyramide, Oberflächeninhalt, Rauminhalt, Projektion, Satz des Pythagoras*	Körper und Flächen können unter verschiedenen Aspekten gemessen oder berechnet werden. Die erhaltenen Maßzahlen dienen dazu, die Verwendung von Körpern und Flächen in unterschiedlichen alltäglichen Zusammenhängen zu beschreiben.

* nur für Erweiterungskurse, s. S. 42

Lernsituationen mit Handlungsmöglichkeiten

Wie aussagekräftig sind Statistiken?
Statistische Erhebungen durchführen, Zahlenmaterial aus statistischen Veröffentlichungen entnehmen; Untersuchungsmerkmale beschreiben; erhobene Daten ordnen und in Klassen einteilen; Verteilungen bilden, geeignet darstellen; Darstellungsformen vergleichen und interpretieren; Mittelwerte und Streumaße berechnen und interpretieren; Summenverteilungen bilden, darstellen und interpretieren; graphische Darstellungen statistischer Erhebungen verstehen und deuten; graphische Darstellungen statistischer Daten in Zeitungen analysieren und über „Botschaften" des Autors spekulieren; Taschenrechner oder Tabellenkalkulation benutzen.

Lotterien und andere Wettsysteme analysieren
Informationen über verschiedene Lotterien und Wettsysteme (Lotto, Toto, Pferderennen, Ergebniswetten, Klassenlotterien) zusammentragen und mit den entsprechenden mathematischen Begriffen beschreiben; Auswahlverfahren unterscheiden und Verfahren zur Berechnung von Auswahlanzahlen anwenden; Aussagen über Einsatz und Gewinnchancen treffen; auf die volkswirtschaftliche Bedeutung von Lotterien eingehen.

Werkstücke untersuchen
Unterschiedliche „Werkstücke" (Bolzen, Vierkantmuttern, Aufbewahrungsgegenstände, Dekorationskörper, Schmuckgegenstände) auswählen, diese unter mathematischen Gesichtspunkten beschreiben, in verschiedenen Ansichten maßstabsgerecht zeichnen; Materialverbrauch berechnen; Informationen über Material und Verkaufspreise einholen und vergleichen; Preisdifferenzen ermitteln und Ursachen finden.

Verpackungen und Wareninhalt im Vergleich
Verpackungen und deren Inhalt untersuchen und vergleichen, Rauminhalt berechnen und Wareninhalt bestimmen und ins Verhältnis setzen; Mogelpackungen erkennen, Preisvergleiche über Proportionalität durchführen; Materialbedarf schätzen, bestimmen und minimieren; Verpackungsform und -funktion in Beziehung setzen, Verpackungen, die aus einem Stück bestehen (z. B. Versandkarton mit Deckel und Unterteilungen) untersuchen.

Jahrgangsstufen 9 und 10

Anforderungen	Inhalte	Sinn, Bedeutung, zentrale Ideen
Themenfeld: Vergleichen und Messen Große und kleine Zahlen in wissenschaftlicher Notation zur Beschreibung von Größenordnungen		
Mit sehr großen und sehr kleinen Zahlen rechnen und Ergebnisse angemessen interpretieren; funktionale Zusammenhänge (proportionale und antiproportionale Zuordnung) mathematisch erfassen, darstellen und interpretieren	**Arithmetik:** Schätzen; Rechnen mit Potenzen, Zahlendarstellungen mit Zehnerpotenzen **Algebra/Funktionen:** Verhältnis; Prozentrechnung; proportionale und antiproportionale Funktion **Geometrie:** Strahlensätze*, Ähnlichkeit* **Hilfsmittel:** Taschenrechner, Tabellenkalkulation	Quantifizierbare Eigenschaften können zum Gegenstand funktionaler Untersuchungen werden. Sie dienen auch der zahlenmäßigen Beschreibung von Wirklichkeitsbezügen, die den Sinnen nicht unmittelbar zugänglich sind.

Themenfeld: Beziehungen im Raum Beziehungen in Dreiecken zur Berechnung von Strecken und Winkeln nutzen		
In geradlinig begrenzten Figuren Streckenverhältnisse zu Berechnungen nutzen; den Zusammenhang zwischen Seitenverhältnissen und Winkeln in rechtwinkligen Dreiecken kennen; rechtwinklige Dreiecke in Figuren und Körpern erkennen und den Satz des Pythagoras zur Lösung von Sachaufgaben anwenden	**Arithmetik:** Mit Potenzen und Wurzeln rechnen **Algebra/Funktionen:** Verhältnisse, Trigonometrische Funktionen* **Geometrie:** Projektion; Streckenverhältnisse; Satz des Pythagoras*; Strahlensätze*, Ähnlichkeit*; Trigonometrie* **Hilfsmittel:** Taschenrechner	Gegenstände im Raum werden in geometrischen Formen (Winkel, Strecke, Dreieck, ...) und geometrischen Beziehungen (rechtwinklig, anliegend, gegenüberliegend, ...); geometrische Beziehungen werden durch Zahlen und Symbole ausgedrückt und ermöglichen Berechnungen.

* nur für Erweiterungskurse, s. S. 42

Lernsituationen mit Handlungsmöglichkeiten

Den Makrokosmos entdecken und beschreiben
Entfernungen in der Astronomie, Lichtgeschwindigkeit, Zeiten in der Geschichte des Kosmos veranschaulichen und durch Zahlen darstellen; Größenordnungen abschätzen, wissenschaftliche Darstellung von großen Zahlen verwenden; Graphiken mit Hilfe von Bezugsgrößen und Modellen erstellen; Berechnungen mit Hilfe von Potenzen durchführen.

Den Mikrokosmos untersuchen
Den Mikrokosmos entdecken und beschreiben, z. B. anhand von Boden- und Wasseruntersuchungen; Kleinstanteile in Zehnerpotenzen und entsprechenden Maßeinheiten zahlenmäßig erfassen; graphische Darstellungen der Anteile und der absoluten Größen erstellen; Grenzwerte bei Schadstoffen durch Vergleich unterschiedlicher Analysen und ihre Bewertung untersuchen, Methoden zur Grenzwerteinhaltung und Schadensbegrenzung entwickeln, z. B. durch Herstellung neuer Mischungsverhältnisse.

Arbeiten mit Perspektive und Projektion
Mit zentrischen Streckungen experimentieren, Seitenverhältnisse überprüfen; Ähnlichkeit von Figuren durch „Peilen“ (mit dem Auge) bestimmen; Figuren vergrößern und verkleinern, Verhältnisse an Strahlen untersuchen; Perspektiven beim Zeichnen und Fotografieren untersuchen; unterschiedliche Arten der Projektion anwenden.

Rund ums Fliegen
Papierflieger bauen, Winkel und Flächen berechnen; Gleitwinkel durch Versuchsreihen ermitteln, Gleitverhältnisse (Tangens) vergleichen; Leistungsfähigkeit von Segelfliegern durch Vergleich ihrer Gleitverhältnisse untersuchen, geflogene und horizontal zurückgelegte Strecke unter Verwendung der trigonometrischen Funktionen berechnen, Flugkurs unter Berücksichtigung des Winddreiecks bestimmen; Eigengeschwindigkeit und Geschwindigkeit über Grund betrachten.

Jahrgangsstufen 9 und 10

Anforderungen	Inhalte	Sinn, Bedeutung, zentrale Ideen
Themenfeld: Gesellschaft und Wirtschaft Situationen des privaten und gesellschaftlichen Lebens mit mathematischen Mitteln beschreiben und bewerten		
Geldbeträge kalkulieren; Zinsen, Abschläge berechnen; Indizes (z. B. Teuerungsrate) berechnen und zur Berechnung von Veränderungen nutzen	**Arithmetik:** Rechnen mit rationalen Zahlen; Prozentrechnung, Zinsrechnung **Algebra/Funktionen:** lineare und proportionale Funktionen; Gleichungen; Wachstumsfunktion; Funktionsgraphen **Hilfsmittel:** Taschenrechner; Computer (Tabellenkalkulation; Textverarbeitung)	Wirtschaftliche und gesellschaftliche Zusammenhänge können durch Modelle beschrieben werden. Mathematisches Schließen ermöglicht Aussagen über wirtschaftliche Zusammenhänge.

Themenfeld: Kreise und Kreiskörper Kreise, Kreisteile, Kreismuster, kreisförmige Figuren und Körper untersuchen, erforschen, konstruieren und berechnen		
Eigenschaften von Kreis und Kugel kennen; Flächen, Rauminhalte und Winkel berechnen; Rauminhalte und Massen von Körpern berechnen	**Arithmetik:** Rechnen mit Potenzen und Wurzeln, Näherungen* **Algebra/Funktionen:** Formeln für die Berechnungen am Kreis und an der Kugel **Geometrie:** Kreis, Kreisteile, Tangente, Kreisumfang, Kreisring*, Kugel, Kugeloberfläche*, Kegel **Hilfsmittel:** Taschenrechner; Computer	Kreise und kreisförmige Gebilde sind seit jeher vom Menschen zur Strukturierung seiner Umwelt verwendet worden. Die so „einfach" anmutende Kreisgestalt erfordert allerdings zu ihrer genaueren Beschreibung recht aufwändige mathematische Überlegungen.

* nur für Erweiterungskurse, s. S. 42

Lernsituationen mit Handlungsmöglichkeiten

Einkommen nach der Schulzeit
Brutto- und Nettoeinkommen unterscheiden; Lohn, Kirchensteuer und andere Zuschläge ausrechnen; die aktuellen Bedingungen der Sozialversicherungsbeiträge herausfinden und für verschiedene Einkommen durchrechnen; staatliche Unterstützungsmöglichkeiten erkunden und diese durchrechnen; evtl. eine Tabellenkalkulation benutzen und damit aussagekräftige Diagramme erzeugen.

Mit Geld „wirtschaften"
Unterschiedliche Finanzierungen (Sparen oder Abzahlen) erkunden, berechnen und vergleichen, dabei Teuerungsrate und Einkommenszuwachs berücksichtigen; Effektivzins berechnen; verschiedene Spar- und Anlagemodelle erkunden, durchrechnen und bewerten; Tabellenkalkulation benutzen.

Kreise in Natur und Kunst
Beispiele für Kreise, Kreismuster, Kreisteile und kreisförmige Gebilde aus Natur und Kunst zusammentragen; vorgefundene Muster analysieren und nachkonstruieren, dabei die Konstruktion von Mittelpunkt und Tangente herausfinden und anwenden; Beziehungen zwischen Radius, Kreisumfang und Kreisfläche herstellen und zur Berechnung nutzen; Formeln für Kreisteile und Kreisringe herleiten.

Forschungen an Kreiskörpern
Forschungen an Kreiskörpern durchführen, ausgelöst durch Fragestellungen wie: „Wie schwer ist ein Wassertropfen?", „Wie schwer ist der Fudschijama?", „Wie viele Wassertropfen passen in eine Konservendose?", „Welches Verhältnis besteht zwischen dem Flächeninhalt des Grundkreises und Oberfläche der Kugel?", „Welcher Kreiskörper hat bei gleichem Volumen die größte Oberfläche?"; die Ergebnisse begründen bzw. beweisen; den Computer als Hilfsmittel benutzen.

Jahrgangsstufen 9 und 10

Anforderungen	Inhalte	Sinn, Bedeutung, zentrale Ideen
Themenfeld: Zuordnungen und Modelle Geeignete Situationen (wirtschaftliche, zeitpolitische, geschichtliche, ...) auf funktionale Abhängigkeiten hin untersuchen und graphisch aufschlüsseln		
Funktionale Zusammenhänge (Tarife) in Anwendungssituationen mathematisch erfassen, interpretieren und Kosten berechnen; Tarife mit linearen Gleichungen modellieren und lineare Gleichungssysteme zeichnerisch (bzw. rechnerisch) lösen; technische Hilfsmittel zur Darstellung von Funktionen benutzen	**Arithmetik:** Rechnen mit rationalen Zahlen, Prozent und Zinsrechnung **Algebra/Funktionen:** Zuordnungen zwischen Größenbereichen; lineare und proportionale Funktionen; Variable und Gleichungen; lineare Gleichungssysteme* **Hilfsmittel:** Computer (Funktionsplotter, Tabellenkalkulation)	Modelle als idealisierende mathematische oder bildhafte Darstellungen helfen, wesentliche Strukturen von Sachsituationen zu verdeutlichen. Modelle verbinden Mathematik mit der Wirklichkeit. Schlüsse im Modell müssen auf die Wirklichkeit bezogen und an ihr überprüft werden.

Themenfeld: Wachstum Untersuchung von Zeitfunktionen, deren Veränderung vom erreichten Wert abhängt		
Exponentielles Wachstum in der Erfahrungswelt erkennen, als funktionalen Zusammenhang erfassen, darstellen, interpretieren und auf verschiedene Weisen darstellen; Wachstumsprozesse modellieren, Hochrechnungen für zukünftige Entwicklungen durchführen und interpretieren; technische Hilfsmittel zur Berechnung und zur Darstellung von Wachstumsprozessen nutzen	**Arithmetik:** Mit Wurzeln und Potenzen rechnen, Näherungen* **Algebra/Funktionen:** n-te Wurzel, Zinseszins*, Exponentialfunktion*, Wachstumsfaktor, Wachstumsfunktion, Logarithmus* **Hilfsmittel:** Taschenrechner; Computer (Funktionsplotter, Tabellenkalkulation, Computeralgebra-System)	Wachstumsvorgänge lassen sich mit Exponentialfunktionen modellieren, sie erlauben in gewissen Grenzen Prognosen für die zukünftige Entwicklung, sie lassen sich Schritt für Schritt mit dem Taschenrechner oder Computer (Tabellenkalkulation oder Modellbildungssystem) modellieren.

* nur für Erweiterungskurse, s. S. 42

Lernsituationen mit Handlungsmöglichkeiten
Tarifsysteme untersuchen Telefon- oder Internetgebühren, Strom-, Wassertarife, Preise zuschlagfreier Bahnfahrkarten, Kfz-Steuer untersuchen und graphisch darstellen; Tarife danach unterscheiden, ob sie einen Grundbetrag enthalten oder nicht; Tarife als proportionale oder lineare Funktionen mathematisch modellieren und graphisch darstellen; Berechnungen unter Benutzung von linearen Gleichungssystemen durchführen. **CarSharing** Umweltbelastungen durch Autoverkehr in Diagrammen darstellen; Kosten für ein Auto zusammenstellen und Durchschnittswerte (pro gefahrenem km, pro Monat, ...) berechnen; sich über das aktuelle CarSharing-Angebot in der Gemeinde informieren: Aufnahmegebühr, monatlicher Grundbetrag, Kosten in Abhängigkeit von gefahrenen Kilometern sowie Zeitpunkt und Dauer der Nutzung; verschiedene CarSharing-Tarife darstellen und vergleichen; CarSharing-Tarife als lineares Gleichungssystem modellieren; lineare Gleichungssysteme graphisch, rechnerisch, eventuell auch mit einer Tabellenkalkulation lösen.

Bevölkerungswachstum (s. Unterrichtsbeispiel im Anhang) Wachsen und Abnehmen von Bevölkerungen mit der Wachstumsrate und dem Wachstumsfaktor bestimmen; Verdopplungszeiten bestimmen und die Faustregel für die Verdopplung finden; Bevölkerungswachstum heute mit dem Wachstum während der Industrialisierung vergleichen; Wachstumsprozesse mit der Tabellenkalkulation verfolgen; Wachstum unter der Annahme kleiner werdender Wachstumsraten untersuchen; Einfluss kleiner und älter werdender Bevölkerungen auf soziale Sicherungssysteme ergründen. **Wachstums- und Zerfallsprozesse** Bevölkerungsentwicklung als Wachstumsprozess modellieren; Einfluss kleiner werdender Wachstumsraten untersuchen; Verdopplungszeiten bestimmen; Zusammenhang von Geburtenrate und Wachstumsfaktor ergründen; Bevölkerungsabnahme modellieren; Grenzen der Modellbildungen untersuchen (z. B. der deutsche Außenhandel oder Energieverbrauch, Bevölkerungswachstum als Wachstumsprozess); „Wachstum" als Gegenstand der Politik; gekoppelte Wachstums- und Abnahmeprozesse untersuchen; auf andere Wachstums- und Zerfallsprozesse übertragen (z. B. radioaktiver Zerfall).

Anforderungen	Inhalte	Sinn, Bedeutung, zentrale Ideen
Themenfeld: Mathematische Reisen Durch iterative Verfahren mathematische Gesetzmäßigkeiten aufschlüsseln und strukturieren		
Begründen, dass die Erweiterung der Zahlbereiche notwendig ist; einfache Beweise nachvollziehen; Näherungsverfahren, bei denen schrittweise durch Verfeinerung die Näherung verbessert wird anwenden; Berechnungsformeln und Funktionen wiederholt auf sich selbst anwenden und die Ergebnisse interpretieren	**Arithmetik:** Rechnen mit rationalen Zahlen; Wurzeln, Potenzen; Näherungen* **Algebra/Funktionen:** Variablen und Gleichungen; quadratische Gleichungen und Funktionen* **Geometrie:** Eigenschaften von ebenen Figuren und Körpern **Hilfsmittel:** Taschenrechner; Computer	Häufig gibt es für zunächst eher spielerisch anmutende Strukturierungen und Konstruktionen überraschende Entsprechungen in der Natur und interessante Anwendungen.

Anforderungen	Inhalte	Sinn, Bedeutung, zentrale Ideen
Themenfeld: Mathematische Grundfertigkeiten Die in den Jahrgängen 5 bis 8 erworbenen mathematischen Fertigkeiten sind zu vertiefen und zu erweitern. Dies geschieht zunächst in Sinnzusammenhängen in verschiedenen Lernsituationen. Es können einzelne Fertigkeiten ausdrücklich Gegenstand des Unterrichts werden.		
Mit Zahlen und Größen in Anwendungssituationen sicher umgehen; grundlegende graphische und rechnerische Verfahren zur Lösung von Gleichungen verstehen und beherrschen; Fragestellungen aus verschiedenen Sachgebieten unter der Verwendung von Formeln lösen; Flächen und Rauminhalte berechnen; Verteilungen bearbeiten und interpretieren	**Arithmetik:** Rechnen mit rationalen Zahlen, Näherungen* **Algebra/Funktionen:** Prozentrechnung, Zinsrechnung, Schlussrechnung, Proportion, Variable, lineare Gleichungen, lineare Gleichungssysteme*, quadratische Gleichung* **Geometrie:** Flächeninhalt, Rauminhalt	Bestimmte mathematische Grundfertigkeiten schaffen eine Voraussetzung dafür, sowohl beruflichen als auch schulischen Ausbildungsgängen gerecht zu werden.

* nur für Erweiterungskurse, s. S. 42

Lernsituationen mit Handlungsmöglichkeiten
Reise in das Reich der Zahlen Spiralen und Fibonaccizahlen in der Natur suchen, Fibonaccifolge aufstellen, den Quotienten benachbarter Folgenglieder bilden und seinen Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt und den Verhältnissen der Seiten im Pentagramm herstellen; die gewonnenen Erkenntnisse mit der Geschichte der Zahlen und der Erweiterung der Zahlbereiche verknüpfen.
Geschichte der Zahl π Faszination des Kreises in Kunst, Technik, Tanz, Mythos, ... wahrnehmen; Näherungen für π im Altertum (Brüche als Näherungen) ansprechen; Kreisinhalt durch Auszählen von Flächen und durch regelmäßige Vielecke bestimmen (einen Algorithmus konstruieren); Zusammenhang von Kreisumfang und Kreisfläche herstellen; Umfang durch Abrollen und durch regelmäßige Vielecke annähern; den Wettlauf um die Bestimmung von immer mehr Stellen von π ansprechen; untersuchen, wo π noch vorkommt (z. B. Kugel, trigonometrische Funktionen, auf dem 10-DM-Schein); π mit der Monte-Carlo-Methode annähern; evtl. eine Näherung mit Taschenrechner oder Computer durchführen.

Aufgabenstellungen in Sachzusammenhängen, zu deren Bearbeitung Prozent-, Zins- und Schlussrechnung notwendig sind, lösen und die Plausibilität der gefundenen Lösung mit mehreren Verfahren überprüfen;
algebraische und geometrische Formeln umformen, ineinander einsetzen, als Funktionsgleichung interpretieren, tabellieren und zeichnen;
Gleichungen näherungsweise, graphisch, rechnerisch oder mit Computeralgebra lösen und interpretieren und über die Genauigkeit des Ergebnisses reflektieren;
komplexe Sachaufgaben, in denen Flächeninhalte, Rauminhalte sowie Massen zu berechnen sind, lösen; sowie die Plausibilität einer Lösung durch geeignete Verfahren überprüfen.

Anforderungen	Inhalte	Sinn, Bedeutung, zentrale Ideen
Themenfeld: *Rechnen mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen Formeln und Gesetze in Technik und Naturwissenschaften verstehen und mit ihnen umgehen		
Bei Potenzen und Wurzeln über die sinnvolle Genauigkeit von Berechnungen entscheiden; die beiden Umkehrungen der Potenz kennen und anwenden; Potenzgesetze verwenden; Fragestellungen in Sachsituationen unter Verwendung von Formeln und graphischen Verfahren lösen und Lösungen auf den Sachzusammenhang rückbeziehen	**Arithmetik:** Mit Wurzeln, Potenzen und Logarithmen rechnen **Algebra/Funktionen:** Potenz, n-te Wurzel, Logarithmus, Regeln für das Rechnen mit Potenzen und Wurzeln, Näherungsverfahren zur Wurzelberechnung, Wurzeln als nichtrationale Zahlen, quadratische Funktion, Potenzfunktion, Wurzelfunktion, Umkehrfunktion	Die genauere Beschäftigung mit der Potenzrechnung führt zu zwei interessanten Erfahrungen: Die „naiven" Potenzregeln lassen sich konsequent auf ganze und rationale Zahlen ausweiten; aber im Unterschied zur Addition und Multiplikation lassen sich zum Potenzieren mit dem Wurzelziehen und Logarithmieren zwei Umkehroperationen definieren.

Themenfeld: *Die Satzgruppe des Pythagoras In rechtwinklig begrenzten Flächen und im Raum Entfernungen mit dem Satz von Pythagoras bestimmen.		
Rechtwinklige Dreiecke in Figuren und Körpern erkennen; den Satz des Pythagoras zur Lösung von Sachaufgaben (z. B. besondere Strecken in Dreiecken und Quadern) anwenden; Beweise im Umfeld des Satzes von Pythagoras nachvollziehen	**Arithmetik:** Mit Potenzen und Wurzeln rechnen **Algebra/Funktionen:** Quadratische Gleichungen, Formeln (Anwendungen des Satzes von Pythagoras) **Geometrie:** Satz des Pythagoras, Projektion, historische Beweise des Satzes von Pythagoras; Höhensatz, Kathetensatz **Hilfsmittel:** Computer: (Geometrieprogramm)	Der „Satz des Pythagoras" ist als große Erkenntnisleistung der antiken Mathematik einzustufen. Da er einen elementargeometrischen Zusammenhang beschreibt, der nicht mehr intuitiv einsichtig ist, lässt sich an ihm exemplarisch die Bedeutung des Beweisens (der deduktiven Methode) erkennen. Die praktische Bedeutung des Satzes liegt in der Bereitstellung einer algebraischen Methode für Berechnungen rechtwinkliger Dreiecke.

* nur für Erweiterungskurse, s. S. 42

Lernsituationen mit Handlungsmöglichkeiten

Wurzeln und Potenzen in der Sachliteratur
Aus Sachbüchern (Schulbüchern) und Fachzeitschriften Formeln mit Potenzen und Wurzeln zusammentragen (z. B. Luftwiderstand, Fallweg, Leistung von Windkraftanlagen, Pendelschwingung, Computerspeicher, Kugel, Würfel, Umlaufzeiten und Radien von Planeten, Bewegungsenergie, Energie und Masse); Formeln in Sachzusammenhängen interpretieren (z. B. einer Verdopplung des Kugelradius entspricht eine Verachtfachung des Volumens); Formeln umstellen und Berechnungen durchführen.

Mit Exponential und Logarithmusfunktion experimentieren
Zu Exponentialfunktionen Wertetabellen anlegen und Graphen zeichnen; Zwischenwerte und Anfangswerte durch Potenzieren bzw. Radizieren bestimmen; Zusammenhang zu Wachstumsfunktionen herstellen; Umkehren der Potenz durch Wurzel und Logarithmus; Eigenschaften von Exponential- und Logarithmusfunktion vergleichen.

Messen im Raum
Dreiecke zur Vermessung des Raumes verwenden; mit dem Satz des Pythagoras Längen und Entfernungen bestimmen; Höhen mit Hilfe von Ähnlichkeit/ Kongruenz und dem Satz des Pythagoras bestimmen; Höhenlinien in Karten deuten und interpretieren; Höhenunterschiede und Steigungen bei Straßen ermitteln; Strecken zerlegen und auf Koordinatenachsen projizieren (z. B. Kreisbewegung, Kräfte, mechanische Arbeit, ...).

Der Satz des Pythagoras in der Geschichte
Historische Quellen für das Auftauchen des „Pythagoras" studieren; pythagoräische Zahlentripel in verschiedenen Kulturen (Babylon, Ägypten, Griechenland, Indien, China, Arabien, europäische Megalithkulturen) kennen lernen; pythagoräische Zahlentripel bestimmen und überprüfen; historische Beweise des Satzes nachvollziehen.

Anforderungen	Inhalte	Sinn, Bedeutung, zentrale Ideen
Themenfeld: *Untersuchung quadratischer Funktionen Quadratische Funktionen aus unterschiedlichen Blickwinkeln betrachten: Als Funktion, als Graph (Parabel), als Gleichung mit Lösungen und als Umkehrfunktion (Wurzelfunktion)		
Grundlegende graphische und rechnerische Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen verstehen und beherrschen; dabei rationelle Lösungsstrategien anwenden; Anwendungen, die auf ein durch quadratische Funktionen beschreibbares Extremwertproblem führen, (graphisch) bearbeiten und interpretieren; einfache Beweise nachvollziehen	**Algebra/Funktionen** Wertetabelle, quadratische Funktion, quadratische Gleichung, Linearfaktoren, quadratische Ergänzung, Parabel, Wurzelfunktion **Hilfsmittel:** Graphischer Taschenrechner; Computer (Funktionsplotter, Tabellenkalkulation, Computeralgebra-System)	Schon sehr frühzeitig haben sich Mathematiker auf die Suche nach Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen begeben. Bei physikalischen Modellierungen z. B. Fallgesetze wurden dann quadratische Funktionen auch außermathematisch bedeutsam. In der Untersuchung der Parabel als Graph einer quadratischen Funktion verbinden sich geometrische und algebraische Fragestellungen.
Themenfeld: *Trigonometrie und trigonometrische Funktionen Mit trigonometrischen Funktionen Winkel und Strecken berechnen und Schwingungsvorgänge mathematisch erfassen		
Den Zusammenhang zwischen Seitenverhältnissen und Winkeln in rechtwinkligen Dreiecken kennen und zu Berechnungen verwenden; Strategien zur Berechnung von Seiten und Winkeln in Figuren entwerfen und ausführen; mit Hilfe von Winkelfunktionen Sachaufgaben lösen; Winkelfunktionen graphisch darstellen und ihre Eigenschaften beschreiben	**Algebra/Funktionen:** Formeln zur Bestimmung von Sinus und Kosinus besonderer Winkel **Geometrie:** Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck, Sinus, Kosinus, Tanges, trigonometrische Funktionen, periodische Funktion, Satz des Pythagoras **Hilfsmittel:** (graphischer) Taschenrechner, Computeralgebra-System; Tabellenkalkulation; Funktionsplotter	Die Trigonometrie macht die Konstanz der Seitenverhältnisse in ähnlichen Dreiecken zum Ausgangspunkt einer algebraischen Methode zur Dreiecksberechnung, die vielfältige praktische Anwendungen – etwa bei Geländevermessungen – ermöglicht. Die durch weitere Abstraktion zu gewinnenden trigonometrischen Funktionen erweisen sich als geeignet für die Modellierung periodischer Vorgänge, wie etwa Drehbewegungen und Schwingungen.

* nur für Erweiterungskurse, s. S. 42

Lernsituationen mit Handlungsmöglichkeiten
Brücken konstruieren Brücken nach Konstruktionstypen vergleichen und ordnen; Brücken im Modell konstruieren und bauen, Belastungsversuche durchführen; Abmessungen einer realen Brücke ermitteln; Bogenbrücken ins Koordinatensystem übertragen; Wertetabellen zum Graphen der Brücke erstellen und Funktionsgleichung bestimmen (auch aus Spannweite und Höhe), Spannweite und Höhe einer durch eine Funktionsgleichung beschriebenen Brücke berechnen; Vorteile parabelförmiger Träger beim Brückenbau nachweisen. **Geschwindigkeit und Anhalteweg** Anhalteweg eines Fahrzeugs analysieren; Reaktionszeiten und Bremswege sowie Vorbremswege bestimmen; Zusammenhang von Geschwindigkeit und Anhalteweg herstellen und untersuchen; Bremsweg und Straßenbeschaffenheit analysieren; Anhalteweg in Abhängigkeit von Reaktionszeit und Geschwindigkeit untersuchen; Zusammenhänge graphisch darstellen; Formeln umstellen; Geschwindigkeitsmessungen in Tempo-30-Zonen durchführen; Sicherheitsabstände für Kolonnefahren errechnen; Faustregeln für Anhalteweg und Sicherheitsabstand kennen lernen.

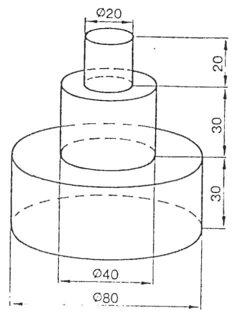
Untersuchungen im Ablauf der Natur
Tierpopulationen, Gezeiten, Himmelskörper, Uhren, Drehbewegung, schwingende Saiten, ... beschreiben und bestimmen, für welche Schwingungsvorgänge die Sinus bzw. Kosinusfunktion ein Modell ist; den Einfluss von Frequenz, Phase und Amplitude auf die Darstellung von Schwingungen untersuchen; entsprechende Zeichnungen mit Hilfe des Taschenrechners oder des Computers anfertigen; den Zusammenhang von Kreisbewegung und Sinusschwingung im Experiment und zeichnerisch nachvollziehen. **Messungen im Gelände** Trigonometrische Funktionen auf Messprobleme in der Realität anwenden; Höhen von Gebäuden etc. mit Hilfe des Höhenwinkels bestimmen; Entfernungen von nicht erreichbaren Orten oder Höhen von Geländeerhebungen mit Hilfe des Kosinus bzw. Sinus im rechtwinkligen Dreieck errechnen; Vermessungen durchführen, die ein Vorwärtseinschneiden nach einem Punkt bzw. Vorwärtseinschneiden nach zwei Punkten bedingen (Anwendung des Sinus- bzw. des Kosinussatzes), Fehlerrechnung bei Höhenbestimmungen durchführen

Anlage 6

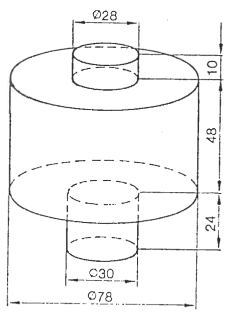
Eigene Arbeitsblätter

1. Arbeitsblatt zur Volumenberechnung von zusammengesetzten Körpern

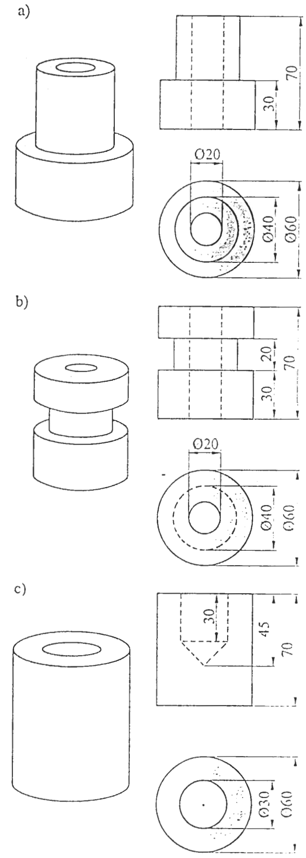
1.



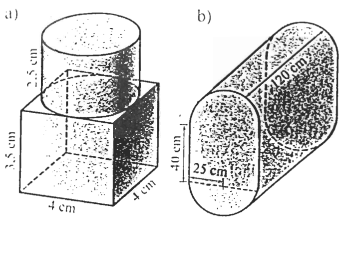
2.



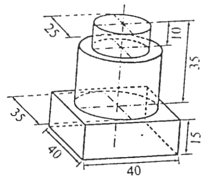
3.



4.

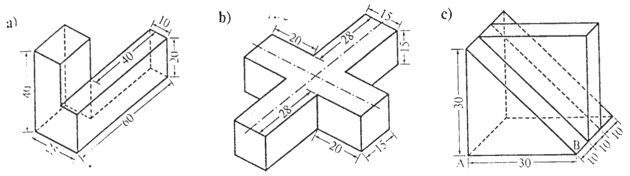


5.

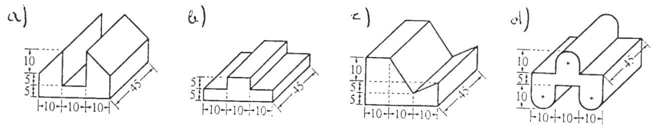


2. Arbeitsblatt zur Volumenberechnung von zusammengesetzten Körpern

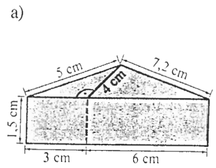
1.

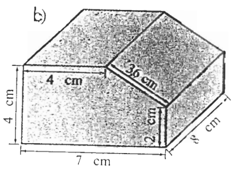


2.

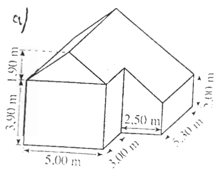


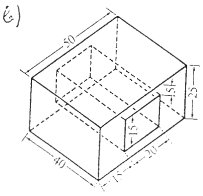
3.



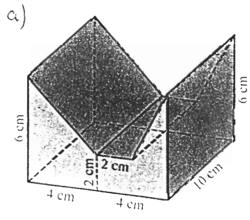


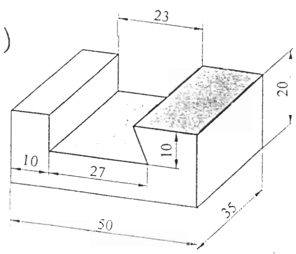
4.





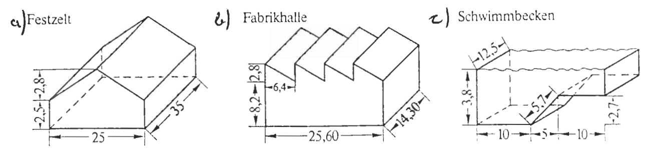
5.



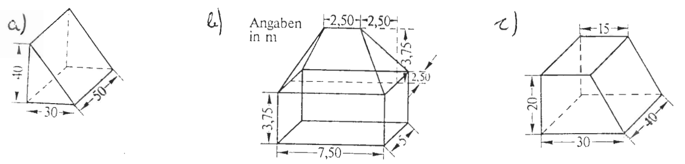


3. Arbeitsblatt zur Volumenberechnung von zusammengesetzten Körpern

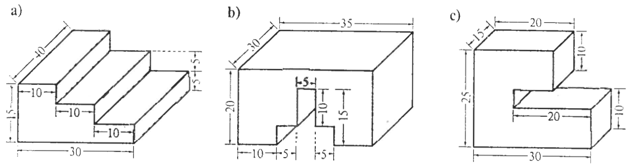
1.



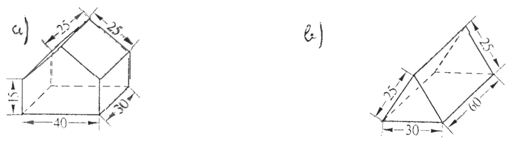
2.



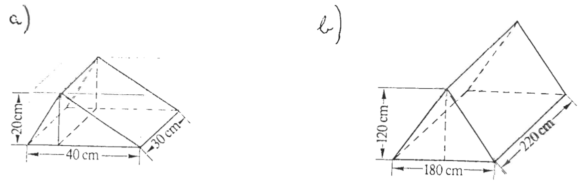
3.



4.



5.



Arbeitsblatt: Zusammengesetzter Dreisatz

1) Mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km/h erreicht ein Autofahrer sein Ziel in 8 Stunden. Wie schnell muss er im Durchschnitt fahren, wenn er in 6 Stunden am Ziel sein will?

2) Um einen Rheinkahn mit Koks zu entleeren, muss ein 2,5 m^3 fassender LKW 28 mal fahren. Wie oft müsste ein Lastwagen fahren, der 3,5 m^3 fasst?

3) Für ein Darlehen werden in einem Jahr 1227,- € Zinsen gezahlt. Wie hoch sind die Zinsen für 7 Monate (3, 9, 11 Monate)?

4) Eine Treppenhausbeleuchtung mit 6 Glühbirnen zu je 40 Watt verursacht monatliche Stromkosten in Höhe von 2,16 €. Wie hoch würden die Kosten, wenn 7 Glühbirnen zu je 60 Watt installiert werden?

5) Eine Pumpe fördert in 10 Stunden 240 t Rohöl. Wie viel Tonnen Rohöl würden 7 dieser Pumpen in 8½ Stunden fördern?

6) In 8 Arbeitsstunden heben 2 Schaufelbagger 420 m^3 Erde aus. Wie viele Stunden dauert der Aushub von 560 m^3 Erde, wenn 3 Bagger eingesetzt werden?

7) Um die Kostüme für die Premiere eines Musicals zu schneidern, müssen 5 Näherinnen bei 8stündiger Arbeitszeit 18 Tage lang arbeiten. Weil die Premiere vorverlegt wird, werden die Kostüme schon 6 Tage früher benötigt. Wie viel Näherinnen müssen zusätzlich eingesetzt werden, wenn die Arbeitszeit auch noch auf 10 Stunden täglich verlängert wird?

8) Für ein Bankguthaben in Höhe von 9000,- € erhält man in 9 Monaten 180,- € Zinsen. Wie viel Zinsen erhält man für 10600,- € in 7 Monaten unter gleichen Bedingungen?

9) Zwei Pumpen füllen in 6½ Stunden den 1700 t fassenden Tank eines Schiffs. In welcher Zeit würden 3 Pumpen einen 2000 t fassenden Tank füllen?

10) Acht Monteure legen in 7 Tagen bei 8stündiger Arbeitszeit 6000 m Kabel. Wie viel Meter Kabel würden 5 Monteure in 9 Tagen bei 7,5stündiger Arbeitszeit verlegen?

1. Arbeitsblatt : Trigonometrische Berechnungen

1) **Um wieviel m liegt der Endpunkt einer 450 m (832 m) langen, geraden Straße höher als der Anfangspunkt, wenn der Steigungswinkel der Straße 6,4° (7,9°) beträgt?**

2) In einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90°$) sind bekannt:
a) $\alpha = 50°$, $c = 18$ cm **c)** $\alpha = 35°40'$, $a = 12{,}5$ cm **e)** $\alpha = 38{,}4°$, $b = 16{,}8$ cm
b) $\beta = 38°$, $c = 54$ cm **d)** $\beta = 55°10'$, $a = 10{,}4$ cm **f)** $\beta = 29{,}6°$, $b = 42{,}5$ cm
Berechne mit Hilfe der Sinus- und Kosinusfunktion die nicht gegebenen Seiten!

3) In den Kreis M/r ($r = 5$ cm) ist
a) ein gleichseitiges Dreieck, **b)** ein Quadrat, **c)** ein regelmäßiges Fünfeck, **d)** ein regelmäßiges Sechseck gezeichnet.
Berechne die Seitenlänge der Vielecke!

4) Eine 5,20 m lange Leiter ragt an einer Wand bis zu einer Höhe von 4,55 m empor. Welchen Winkel bildet die Leiter mit dem waagerechten Erdboden?

5) Die Sparren eines 8,40 m breiten Satteldaches bilden einen Winkel von 58°. Wie lang sind die Sparren, wenn sie an der Dachtraufe noch 0,30 m überstehen?

6) In einem gleichschenkligen Dreieck sind a und c bekannt ($a = 5{,}4$ cm, $c = 7{,}2$ cm). Berechne mit Hilfe der Kosinusfunktion die Größe der Winkel!

7) Ein gerader Kegel hat den Radius r und den Neigungswinkel α.
Berechne die Länge der Seitenlinie:
a) $r = 15{,}4$ cm, $\alpha = 60{,}4°$ **c)** $r = 112{,}6$ mm, $\alpha = 71°15'$
b) $r = 7{,}8$ cm, $\alpha = 40{,}6°$ **d)** $r = 225{,}4$ mm, $\alpha = 38°32'$

8) Berechne ein rechtwinkliges Dreieck aus:
a) $a = 52{,}4$ cm, $b = 40{,}6$ cm **e)** $a = 20{,}4$ mm, $\beta = 50°7'$
b) $a = 125{,}45$ m, $c = 208{,}65$ m **f)** $b = 34{,}9$ m, $\alpha = 16°34'$
c) $b = 7{,}6$ dm, $c = 12{,}4$ dm **g)** $c = 46{,}3$ cm, $\alpha = 44°50'$
d) $a = 18{,}2$ cm, $\alpha = 36°42'$ **h)** $c = 8{,}9$ mm, $\beta = 64°15'$

9) In einem gleichschenkligen Dreieck ($a = b$) sind gegeben:
a) $a = 44{,}2$ cm, $c = 63{,}4$ cm **d)** $h_c = 14{,}8$ cm, $\alpha = 28°16'$
b) $a = 114{,}5$ m, $\alpha = 32°18'$ **e)** $a = 146{,}4$ m, $h_c = 58{,}4$ m
c) $c = 35{,}4$ cm, $\beta = 43°56'$ **f)** $c = 92{,}6$ cm, $h_c = 42{,}7$ cm
Berechne die nicht gegebenen Stücke und den Flächeninhalt des Dreiecks!

10) Bestimme in dem ungleichseitigen Dreieck ABC die gesuchten Stücke!

gegeben:	gesucht:
a) $h_c = 5{,}2$ cm, $\alpha = 49°45'$, $\beta = 73°27'$	c, F
b) $h_a = 6{,}4$ cm, $a = 5{,}2$ cm, $\beta = 66°20'$	γ, F
c) $h_b = 9{,}2$ cm, $\alpha = 48{,}7°$, $\gamma = 53{,}9°$	b, F
d) $h_c = 8{,}2$ cm, $\alpha = 50°10'$, $F = 123$ cm²	c, β

11) Bestimme die gesuchten Stücke des ungleichseitigen Dreiecks ABC!

gegeben:	gesucht:
a) $a = 4{,}2$ cm, $b = 3{,}6$ cm, $h_c = 3{,}4$ cm	α, β, c
b) $a = 3{,}8$ cm, $c = 5{,}4$ cm, $h_c = 2{,}9$ cm	α, β, b
c) $a = 4{,}5$ cm, $c = 6{,}0$ cm, $h_a = 5{,}0$ cm	α, β, b
d) $h_b = 6{,}4$ cm, $\alpha = 52°$, $\beta = 61°$	a, b, c

12) Ein Quader hat die Kanten a, b und c.
Berechne den Winkel, den die Körperdiagonale mit der senkrechten Kante c bildet:
a) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 8$ cm **c)** $a = 9{,}3$ cm, $b = 4{,}2$ cm, $c = 2{,}5$ cm
b) $a = 12$ cm, $b = 8$ cm, $c = 15$ cm **d)** $a = 20{,}8$ cm, $b = 12{,}4$ cm, $c = 9{,}6$ cm

13) Eine Raute ist zu berechnen aus:
a) $a = 15{,}4$ m, $e = 22{,}3$ m **d)** $e = 7{,}8$ cm, $\beta = 120°42'$
b) $a = 128{,}2$ m, $f = 84{,}6$ m **e)** $f = 19{,}4$ cm, $\alpha = 47°50'$
c) $a = 243{,}5$ m, $\beta = 80°46'$ **f)** $e = 46{,}6$ cm, $f = 26{,}8$ cm

14) Die Seite eines regelmäßigen Fünfecks (Zehnecks) ist 14,4 cm lang.
Berechne **a)** den Radius des einbeschriebenen Kreises,
b) den Radius des umbeschriebenen Kreises,
c) den Flächeninhalt!

15) Der Radius des Umkreises eines regelmäßigen Achtecks (Zehnecks) beträgt 4,8 cm.
Berechne die Seitenlänge!

16) **Die Seitenlinie $s = 18{,}6$ cm eines geraden Kegelstumpfes bildet mit der Grundfläche den Winkel $\alpha = 75°$.**
Wie groß ist das Volumen des Stumpfes, wenn der Radius der kleineren Grundfläche 3,6 cm beträgt?

17) **Ein quadratischer Pyramidenstumpf mit den Grundkanten $a_1 = 7{,}4$ cm und $a_2 = 6{,}0$ cm hat die Höhe $h = 9{,}6$ cm.**
Berechne [redacted] den Neigungswinkel der Seitenflächen,

Vermessung und Technik

18) Auf einem 18 m hohen Aussichtsturm befindet sich eine 2 m hohe Fahnenstange. Unter welchem Sehwinkel wird die Stange von einem Punkte aus gesehen, der 50 m vom Fuße des Turmes entfernt ist? (Waagerechte Entfernung.)

19) Ein Siedlungsgelände hat die Form eines Rechtecks, dessen Länge 224 m (186 m) beträgt. Ein in Richtung der Diagonale angelegter Weg ist 272 m (248 m) lang. Wie groß ist das Siedlungsgelände?

20) Das kegelförmige Dach eines runden Turmes hat einen Umfang von 10 m und eine Seitenlinie (Sparrenlänge) von 7,60 m.
Berechne den Neigungswinkel, die Höhe und die Oberfläche des Daches!

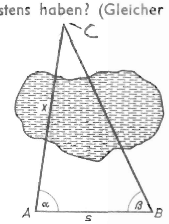
2. Arbeitsblatt : Trigonometrische Berechnungen

21) Der Querschnitt eines Dammes hat die Form eines gleichschenkligen Trapezes. Die Kronenbreite beträgt 8,40 m, die Böschungslänge 6,60 m und der Böschungswinkel 40°.
Berechne die Höhe und die Sohlenbreite des Dammes!

22) Zwei Riemenscheiben, deren Achsenabstand 2,40 m beträgt, haben die Radien $r_1 = 44$ cm und $r_2 = 18$ cm.
Welche Länge muß der aufgelegte Treibriemen mindestens haben? (Gleicher Drehsinn der Scheiben!)

23)
a) $a = 32{,}4$ cm, $c = 62{,}5$ cm, $\alpha = 25°24'$
b) $b = 48{,}4$ cm, $c = 86{,}7$ cm, $\beta = 27°15'$
c) $b = 52{,}9$ cm, $c = 67{,}6$ cm, $\gamma = 108°6'$
d) $a = 72{,}5$ m, $b = 22{,}3$ m, $\alpha = 78°30'$
e) $a = 10{,}25$ m, $b = 18{,}42$ m, $\beta = 69°48'$

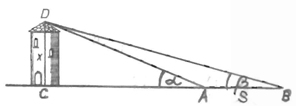
24).
a) $a = 7{,}2$ cm, $b = 5{,}9$ cm, $\gamma = 58{,}5°$
b) $b = 25{,}4$ m, $c = 44{,}5$ m, $\alpha = 86°28'$
c) $a = 83$ m, $c = 92$ m, $\beta = 105°36'$
d) $a = 6{,}8$ cm, $b = 9{,}2$ cm, $c = 12{,}4$ cm
e) $a = 4{,}5$ m, $b = 6{,}4$ m, $c = 8{,}6$ m



190.1

25) Um die Entfernung zweier Punkte A und C, die wegen eines Hindernisses nicht direkt meßbar ist, zu bestimmen, ist von A aus eine Standlinie $AB = s$ abgesteckt worden. Von A und B aus hat man C anvisiert und die Winkel α und β zwischen der Standlinie und den Visierlinien gemessen. (Abb. 190.1) $s = 75$ m, $\alpha = 82°$, $\beta = 64°$.

26) Um die Höhe eines Turmes berechnen zu können, hat man von den Endpunkten A und B einer waagerechten Standlinie ($s = 32$ m), die in Richtung auf den Turm zuläuft, die Höhenwinkel $\alpha = 22°$ und $\beta = 15°$ gemessen. (Abb. 190.2)
Wie hoch ist der Turm?
(Bestimme im Dreieck ABD nach dem Sinussatz AD oder BD, dann im rechtwinkligen Dreieck CAD oder CBD die Höhe CD!)



190.2

27) Von zwei Küstenorten A und B (Standlinie s!), die 1,8 km voneinander entfernt sind, wird ein Schiff unter den Winkeln $\alpha = 58°$ und $\beta = 36°$ anvisiert.
Wie weit ist das Schiff von A und B entfernt?
(Auf diese Weise wurde im Altertum die Entfernung von Schiffen aus den gemessenen Größen s, α und β durch Zeichnung bestimmt.)

28) Zur Berechnung der Breite AB eines Flusses hat man in der Verlängerung von AB einen Punkt C festgelegt und eine Standlinie CD ausgemessen, die mit der Verlängerung von AB den Winkel γ bildet.
Von D aus sind die Punkte A und B anvisiert und die Winkel α und β zwischen der Standlinie und den Visierlinien bestimmt worden.
$s = 58$ m, $\gamma = 72°$, $\alpha = 83°$, $\beta = 64°$

29) Die Entfernung zweier Punkte A und B kann wegen eines dazwischen liegenden Hindernisses nicht unmittelbar gemessen werden. Um sie berechnen zu können, sind von [illegible]m Punkte C aus die Entfernungen $CA = 310$ m (540 m) und $CB = 615$ m (720 m) und der Winkel $ACB = 98{,}6°$ (72,4°) gemessen worden.

30) Zwischen zwei Straßen, die einen Winkel von 68° (85,5°) miteinander bilden, liegt ein dreieckiges Baugrundstück.
Die Straßenseiten des Grundstücks sind 28 m (32,50 m) und 17,50 m (22 m) lang.
a) Wie lang ist der Zaun, der das Grundstück umgibt?
b) Zu welchem Preis wird das Grundstück verkauft, wenn 1 m² 8,50 DM kostet?

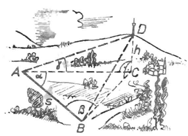
31) Zwei Zufahrtsstraßen von 350 m und 230 m (580 m und 420 m) Länge führen von der Hauptstraße eines Ortes zum Bahnhof. Ihre Einmündungen in die Hauptstraße sind 420 m (720 m) voneinander entfernt.
Unter welchem Winkel treffen sich die Zufahrtsstraßen am Bahnhof?

32) Von den beiden Orten A und B, die 2,3 km voneinander entfern liegen, führen gerade Straßen zum Orte C.
Die Wegstrecke AC ist 2,8 km, die Wegstrecke BC ist 3,4 km lang.
Unter welchem Winkel treffen sich die Straßen in C?

33) Auf einem Berge steht ein 16 m hoher Aussichtsturm, dessen Fußpunkt (A) und dessen Spitze (B) von einem Punkte (C) im Tal unter den Höhenwinkeln $\alpha = 32{,}3°$ und $\beta = 35{,}2°$ ($\alpha = 22°10'$ und $\beta = 24°20'$) gesehen werden.
Wie hoch liegt der Gipfel des Berges über der Talsohle?

34) Von einem Berggipfel aus werden zwei in waagerechter Ebene hintereinanderliegende Orte A und B, die 2,3 km voneinander entfernt sind, unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 10{,}5°$ und $\beta = 4{,}9°$ gesehen.
Wie hoch liegt der Gipfel über den Orten A und B?

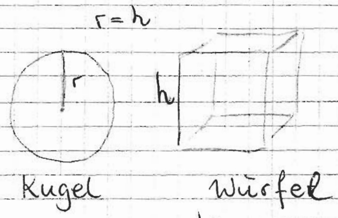
35) Um die Höhe $CD = h$ eines Berges zu bestimmen, wird eine waagerechte Standlinie $AB = s$ abgesteckt und von ihrem Endpunkt A aus der Erhebungswinkel $CAD = \gamma$ gemessen.
(C ist die Projektion des Gipfelpunktes D in der Horizontalebene der Standlinie.) Außerdem werden die Winkel $BAC = \alpha$ und $ABC = \beta$ bestimmt.
Wie hoch liegt der Gipfel des Berges über der Horizontalebene der Standlinie? $s = 920$ m, $\gamma = 20°12'$, $\alpha = 53°20'$, $\beta = 79°40'$



196.1

36) Beweise:
a) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
b) $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

7) a)



Berechne das Volumen der Kugel!

$V = 2197\ cm^3$

Lösung:

$V_W = 2197\ cm^3$

$a = \sqrt[3]{2197\ cm^3}$

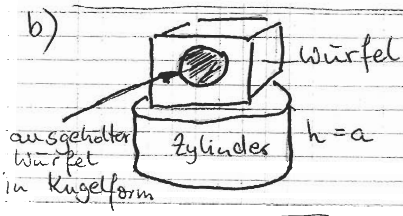
$= 13\ cm$

$r = 6,5$ "

$V_K = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot (\underline{13\ cm})^3 = 9202,8\ cm^3$

$6,5\ cm$ F

b)



Berechne das Volumen aller Körper zusammen*

* ohne das Volumen der Kugel

$a_{würfel} = \sqrt{196}\ cm$

$r_{kugel} = \frac{a}{2} \cdot \frac{3}{4}$

$h_{Zylinder} = a_{würfel}$

$r_{Zylinder} = a \cdot 4$

alles in cm

Lösung: $V_{würfel} = (14\ cm)^3 = 2744\ cm^3$

$r_{Kugel} = \frac{14}{2} cm \cdot \frac{3}{4} = 5,25\ cm$

$V_{Kugel} = \pi \cdot r^3 \cdot \frac{4}{3} = 3,14 \cdot (5,25\ cm)^3 \cdot \frac{4}{3}$

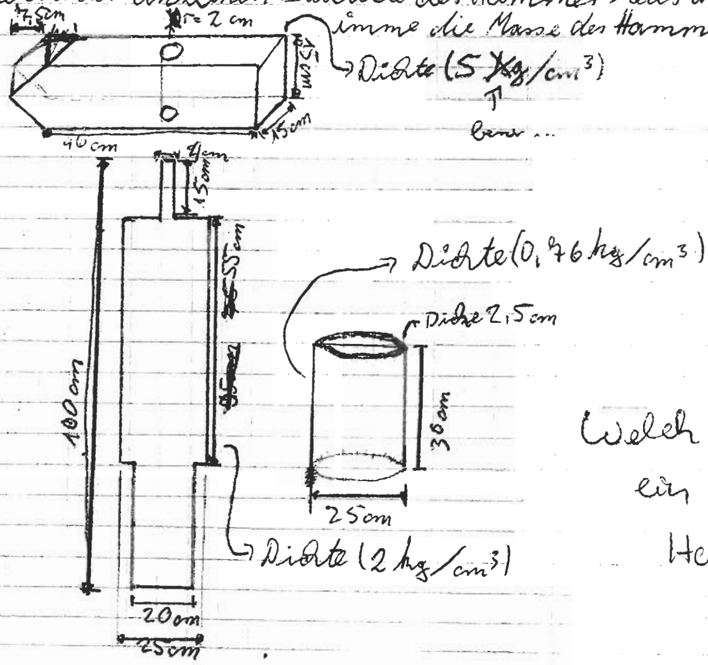
$= 606,13\ cm^3$

$V_{Zylind.} = \pi \cdot (14\ cm \cdot 4)^2 \cdot h$

$= \pi \cdot (56\ cm)^2 \cdot 14\ cm = 137928,48\ cm^3$

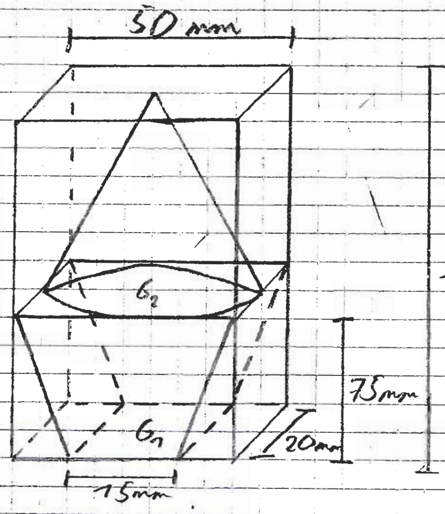
Nr. 7.

Rechne das der einzelnen Bauteile des Hammers aus und bestimme die Masse des Hammers.



Welch ein Hammer!

Nr. 7



Berechne das Volumen ~~des Rechteckes~~ des Quaders u. die dazu gehörigen Figuren. ziehe das Volumen der Figuren ab u. sag was rauskommt.

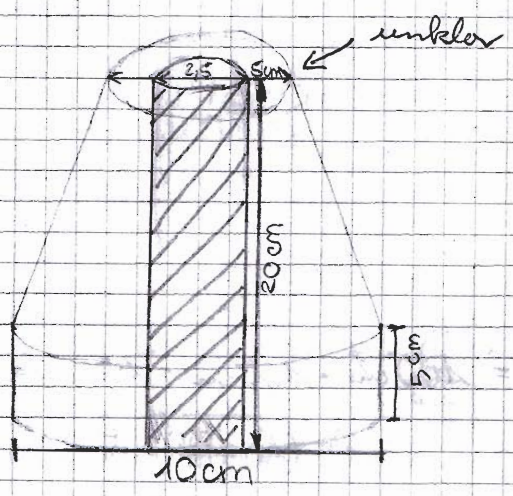
$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 25\,mm^2 \cdot 105\,mm$$
$$= 68722{,}3\,mm^3$$

$$V_{Pyramidenst} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 25\,mm \cdot (300\,mm + \sqrt{300\,mm \cdot 1000\,mm} + 1000$$
$$= 15397{,}7\,mm^3$$

$$V_{\cancel{Rechteck}\ Quader} = a \cdot b \cdot c$$
$$= 50\,mm \cdot 180\,mm \cdot 20\,mm$$
$$= 180000\,mm^3$$

$$V_{\cancel{Rechteck}\ Quader} - V_{Kegel} - V_{Pyramidenst.} = 180000\,mm^3 - 68722{,}3\,mm^3 - 15397{,}7\,mm^3$$
$$= 95880\,mm^3$$

7.)



Kegelst. + Zyl. − Zyl.

Aus einem Kegelstumpf u. Zylinder wurde eine Röhre gebohrt

Rechnung:

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h\left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right)$$

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15cm\left((2{,}5cm)^2 + 2{,}5 \cdot 5cm + (5cm)^2\right)$$

$$= 687{,}2\ cm^3$$

$V_{Zy} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$= \pi \cdot (5cm)^2 \cdot 5cm = 382,7\,cm^3$

~~$-V_{Zy} = \pi \cdot (5cm)^2 \cdot 5cm = 392,7\,cm^3$~~

$-V_{Zy} = \pi \cdot (1,25cm)^2 \cdot 20cm = 98,2\,cm^3$

$V_{gesamt} = 687,2\,cm^3$

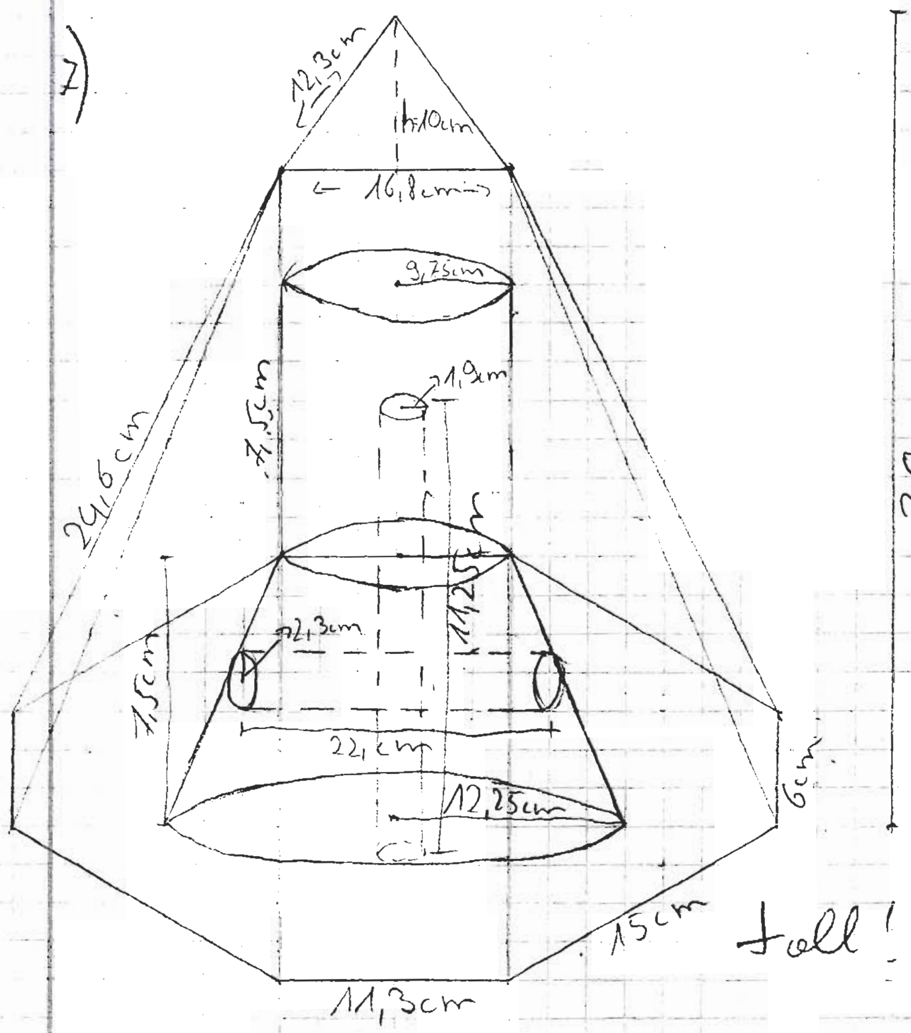
$+\ 392,7\,cm^3$

$1079,9\,cm^3$

$1079,9\,cm^3$

$-\ 98,2\,cm^3$

$981,7\,cm^3$



Bereche die Volumen der Formen
den Mantel, die Oberfläche
Und Fasse zusammen wieviel
Liter Buttermilch in die Formen
passen würde.

Selbständigkeitserklärung

Die eingereichte Dissertation habe ich selbständig verfasst und keine anderen als die in der Arbeit angegebenen Mittel benutzt.

Wörtlich übernommene Ausführungen sind in der Arbeit besonders gekennzeichnet worden.

Klaus-Dieter Kohls